লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
(Right Circular Cone)

20

আকাশ, ঋদ্ধি, আজাদ ও ফতেমা স্কুলের টিফিনে ঠিক করল আজ তারা আইসক্রিম খাবে। তাই তারা তাদের প্রিয় রহিম চাচার কাছে গেল। রহিম চাচা প্রতিদিনই স্কুলের গেটের কাছে টিফিনের সময় বিভিন্ন ধরনের আইসক্রিম বিক্রয় করে। ওরা রহিম চাচার কাছে কুলপি আইসক্রিম চাইলে রহিম চাচা চার জনকে ত্রিকোণাকৃতি একটি বিস্কুটে আইসক্রিম ভরতি করে দিলেন যার মুখটি গোলাকার। ওরা আইসক্রিমের দাম দিয়ে খেলার মাঠের এক প্রান্তে বসে আইসক্রিম খেতে লাগল। হঠাৎ ঋদ্ধি প্রশ্ন করল "তোরা বলত এর মধ্যে কতটা আইসক্রিম আছে?" এরূপ প্রশ্ন শুনে সবাই অবাক।

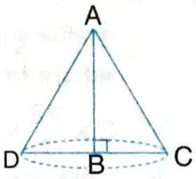
আজাদ বলল "তা তো জানি না"। আকাশ বলল "চল আমরা অঙ্ক স্যারের কাছে এর উত্তরটি জেনে আসি।" তখন ওরা অঙ্কের স্যার অশোকবাবুর কাছে গিয়ে প্রশ্নটা করল। অশোকবাবু প্রশ্নটা শুনে বললেন, "বাঃ! খুব ভালো প্রশ্ন করেছ তোমরা, কিন্তু এটা জানতে গেলে আগে জানতে হবে যার মধ্যে আইসক্রিম আছে তার আকারকে কী বলে, তার আয়তন কী ইত্যাদি।" স্যার বললেন এই আকৃতির বস্তুটিকে শঙ্কু বলে। আমরা প্রতিনিয়ত যেসমস্ত ঘনবস্তু দেখি তাদের মধ্যে শঙ্কু অন্যতম। শঙ্কু একটি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

তখন ফতেমা বলল, "তাহলে এই আইসক্রিমটি একটি শঙ্কু।" স্যার বললেন, "একদম ঠিক।" এরপর অশোকবাবু শঙ্কু আকৃতির আরও কিছু জিনিসের নাম জানতে চাইলেন। তখন ওরা জন্মদিনের টুপি, ফানেল, তাঁবু, বরের টোপর এরকম কিছু উদাহরণ দিল। পরে অঙ্কের ক্লাসে স্যার শঙ্কুর ইতিবৃত্তের মাধ্যমে শঙ্কু সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করলেন।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট (Historical Background) : ভারতের অন্যতম জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্য 1114 খ্রিস্টাব্দে দাক্ষিণাত্যে জন্মগ্রহণ করেন। ভাস্করাচার্য সিদ্ধান্ত শিরোমণি গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। এই গ্রন্থের চারটি ভাগের প্রথম ভাগ লীলাবতীতে পাটীগণিত ও পরিমিতি নিয়ে আলোচনা পাওয়া যায়। গ্রিক গণিতজ্ঞদের বিভিন্ন আলোচনায় অন্যান্য ঘনবস্তুসমূহের (গোলক, বেলন ইত্যাদি) পরিচয় পাওয়া গেলেও লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তেমন কোনো সুনির্দিষ্ট তথ্য পাওয়া যায় না। তবে সম্ভবত ইউক্লিডের জ্যামিতি যেখানে শেষ হয়েছিল তারপর থেকে আর্কিমিডিস (খ্রিস্টপূর্ব 287–212 অব্দ)-এর বিভিন্ন আলোচনায় শঙ্কু, পিরামিড ও গোলক-এর উল্লেখ পাওয়া যায়।

অধ্যায় সংক্রান্ত প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা ও তার সূত্রাবলী

লম্ব বৃত্তকার শঙ্কু (Right Circular Cone) : একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলে। চিত্রে ΔABC-এর $\angle ABC = 90°$। AB-কে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরানোর ফলে ACD শঙ্কু উৎপন্ন হয়েছে।



অক্ষ (Axis) বা উচ্চতা (Height) : সমকোণী ত্রিভুজের যে বাহুর সাপেক্ষে ত্রিভুজকে 360° ঘোরানোর ফলে শঙ্কুটি উৎপন্ন হয়, তাকে শঙ্কুর অক্ষ বলে। একে শঙ্কুর উচ্চতাও বলা হয়ে থাকে। উপরের চিত্রানুযায়ী AB হল শঙ্কুর অক্ষ বা উচ্চতা।

ভূমি বা ভূমিতল (Base) : অক্ষ ছাড়া সমকোণ সংলগ্ন অপর বাহুটি (BC) বৃত্তাকারে আবর্তন করে। এই বৃত্তাকার তলকে ভূমি বা ভূমিতল বলে। চিত্রে CD-কে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার তল হল ভূমিতল এবং BC হল ভূমিতলের ব্যাসার্ধ।

তির্যক উচ্চতা (Slant Height) : সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্যকে তির্যক উচ্চতা বলে। চিত্রে AC হল শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা।

শীর্ষ (Vertex) : সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজের পূর্ণ আবর্তনের সময় সমকৌণিক বিন্দু ব্যতীত অপর যে শীর্ষবিন্দু সর্বদা স্থির থাকে তাকে শঙ্কুর শীর্ষ বা শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে A হল শীর্ষ।

শীর্ষকোণ (Vertical Angle) : শঙ্কুর শীর্ষ ও তির্যক উচ্চতা মিলে যে কোণ উৎপন্ন করে তাই শীর্ষকোণ। শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে উৎপন্ন হয় অর্ধশীর্ষকোণ। চিত্রে $\angle CAD$ হল শীর্ষকোণ এবং $\angle CAB$ হল অর্ধশীর্ষকোণ।

বক্রতল বা পার্শ্বতল (Curved Surface) : শঙ্কুর উপরিভাগের বক্রতলকে পার্শ্বতল বা বক্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে বক্রতল বা পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface Area) বলে।

সমগ্রতল (Total Surface) : বক্রতল ও ভূমিতল মিলে যে তল তৈরি করে তাকে সমগ্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Total Surface Area) বলে।

আয়তন (Volume) : শঙ্কু আকৃতির ফাঁপা পাত্রে যে পরিমাণ জিনিস ধরে বা নিরেট শঙ্কু তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লাগে তার পরিমাণকেই শঙ্কুর আয়তন বলে।

তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r)–এর মধ্যে সম্পর্ক : লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ক্ষেত্রে তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r) মিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC গঠন করে।

∴ $BC = r$, $AB = h$ ও $AC = l$

এবং $\angle ABC = 90°$

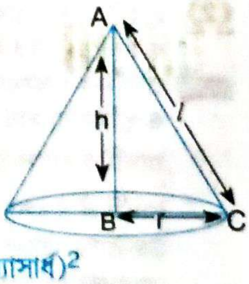
∴ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$

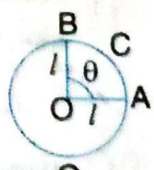
বা, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $l^2 = h^2 + r^2$

বা, $(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 = (\text{উচ্চতা})^2 + (\text{ব্যাসার্ধ})^2$



বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : l সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হল এবং বৃত্তটিকে কাঁচি দিয়ে কাটা হল। ওই বৃত্ত থেকে কেন্দ্রে θ কোণবিশিষ্ট একটি বৃত্তকলা OACB কাটা হল। এরপর আঠার সাহায্যে OA ও OB প্রান্ত দুটি জুড়ে দিলে একটি শঙ্কু উৎপন্ন হবে, যার তির্যক উচ্চতা হবে l একক। অর্থাৎ, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = l



লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
(Right Circular Cone)

আকাশ, ঋদ্ধি, আজাদ ও ফতেমা স্কুলের টিফিনে ঠিক করল আজ তারা আইসক্রিম খাবে। তাই তারা তাদের প্রিয় রহিম চাচার কাছে গেল। রহিম চাচা প্রতিদিনই স্কুলের গেটের কাছে টিফিনের সময় বিভিন্ন ধরনের আইসক্রিম বিক্রয় করে। ওরা রহিম চাচার কাছে কুলপি আইসক্রিম চাইলে রহিম চাচা চার জনকে ত্রিকোণাকৃতি একটি বিস্কুটে আইসক্রিম ভরতি করে দিলেন যার মুখটি গোলাকার। ওরা আইসক্রিমের দাম দিয়ে খেলার মাঠের এক প্রান্তে বসে আইসক্রিম খেতে লাগল। হঠাৎ ঋদ্ধি প্রশ্ন করল "তোরা বলত এর মধ্যে কতটা আইসক্রিম আছে?" এরূপ প্রশ্ন শুনে সবাই অবাক।

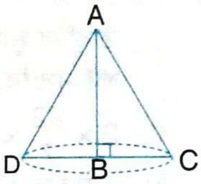
আজাদ বলল "তা তো জানি না"। আকাশ বলল "চল আমরা অঙ্ক স্যারের কাছে এর উত্তরটি জেনে আসি।" তখন ওরা অঙ্কের স্যার অশোকবাবুর কাছে গিয়ে প্রশ্নটা করল। অশোকবাবু প্রশ্নটা শুনে বললেন, "বাঃ! খুব ভালো প্রশ্ন করেছ তোমরা, কিন্তু এটা জানতে গেলে আগে জানতে হবে যার মধ্যে আইসক্রিম আছে তার আকারকে কী বলে, তার আয়তন কী ইত্যাদি।" স্যার বললেন এই আকৃতির বস্তুটিকে শঙ্কু বলে। আমরা প্রতিনিয়ত যেসমস্ত ঘনবস্তু দেখি তাদের মধ্যে শঙ্কু অন্যতম। শঙ্কু একটি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

তখন ফতেমা বলল, "তাহলে এই আইসক্রিমটি একটি শঙ্কু।" স্যার বললেন, "একদম ঠিক।" এরপর অশোকবাবু শঙ্কু আকৃতির আরও কিছু জিনিসের নাম জানতে চাইলেন। তখন ওরা জন্মদিনের টুপি, ফানেল, তাঁবু, বরের টোপর এরকম কিছু উদাহরণ দিল। পরে অঙ্কের ক্লাসে স্যার শঙ্কুর ইতিবৃত্তের মাধ্যমে শঙ্কু সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করলেন।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট (Historical Background) : ভারতের অন্যতম জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্য 1114 খ্রিস্টাব্দে দাক্ষিণাত্যে জন্মগ্রহণ করেন। ভাস্করাচার্য সিদ্ধান্ত শিরোমণি গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। এই গ্রন্থের চারটি ভাগের প্রথম ভাগ লীলাবতীতে পাটীগণিত ও পরিমিতি নিয়ে আলোচনা পাওয়া যায়। গ্রিক গণিতজ্ঞদের বিভিন্ন আলোচনায় অন্যান্য ঘনবস্তুসমূহের (গোলক, বেলন ইত্যাদি) পরিচয় পাওয়া গেলেও লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তেমন কোনো সুনির্দিষ্ট তথ্য পাওয়া যায় না। তবে সম্ভবত ইউক্লিডের জ্যামিতি যেখানে শেষ হয়েছিল তারপর থেকে আর্কিমিডিস (খ্রিস্টপূর্ব 287–212 অব্দ)-এর বিভিন্ন আলোচনায় শঙ্কু, পিরামিড ও গোলক-এর উল্লেখ পাওয়া যায়।

অধ্যায় সংক্রান্ত প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা ও তার সূত্রাবলী

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone) : একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলে। চিত্রে ΔABC-এর $\angle ABC = 90°$। AB-কে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরানোর ফলে ACD শঙ্কু উৎপন্ন হয়েছে।



অক্ষ (Axis) বা উচ্চতা (Height) : সমকোণী ত্রিভুজের যে বাহুর সাপেক্ষে ত্রিভুজকে 360° ঘোরানোর ফলে শঙ্কুটি উৎপন্ন হয়, তাকে শঙ্কুর অক্ষ বলে। একে শঙ্কুর উচ্চতাও বলা হয়ে থাকে। উপরের চিত্রানুযায়ী AB হল শঙ্কুর অক্ষ বা উচ্চতা।

ভূমি বা ভূমিতল (Base) : অক্ষ ছাড়া সমকোণ সংলগ্ন অপর বাহুটি (BC) বৃত্তাকারে আবর্তন করে। এই বৃত্তাকার তলকে ভূমি বা ভূমিতল বলে। চিত্রে CD-কে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার তল হল ভূমিতল এবং BC হল ভূমিতলের ব্যাসার্ধ।

তির্যক উচ্চতা (Slant Height) : সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্যকে তির্যক উচ্চতা বলে। চিত্রে AC হল শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা।

শীর্ষ (Vertex) : সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজের পূর্ণ আবর্তনের সময় সমকৌণিক বিন্দু ব্যতীত অপর যে শীর্ষবিন্দু সর্বদা স্থির থাকে তাকে শঙ্কুর শীর্ষ বা শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে A হল শীর্ষ।

শীর্ষকোণ (Vertical Angle) : শঙ্কুর শীর্ষ ও তির্যক উচ্চতা মিলে যে কোণ উৎপন্ন করে তাই শীর্ষকোণ। শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে উৎপন্ন হয় অর্ধশীর্ষকোণ। চিত্রে $\angle CAD$ হল শীর্ষকোণ এবং $\angle CAB$ হল অর্ধশীর্ষকোণ।

বক্রতল বা পার্শ্বতল (Curved Surface) : শঙ্কুর উপরিভাগের বক্রতলকে পার্শ্বতল বা বক্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে বক্রতল বা পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface Area) বলে।

সমগ্রতল (Total Surface) : বক্রতল ও ভূমিতল মিলে যে তল তৈরি করে তাকে সমগ্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Total Surface Area) বলে।

আয়তন (Volume) : শঙ্কু আকৃতির ফাঁপা পাত্রে যে পরিমাণ জিনিস ধরে বা নিরেট শঙ্কু তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লাগে তার পরিমাণকেই শঙ্কুর আয়তন বলে।

তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r)—এর মধ্যে সম্পর্ক : লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ক্ষেত্রে তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r) মিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC গঠন করে।

$\therefore$ $BC = r$, $AB = h$ ও $AC = l$

এবং $\angle ABC = 90°$

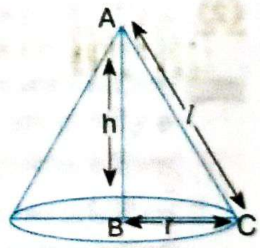
$\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

(অতিভুজ)^2 = (লম্ব)^2 + (ভূমি)^2

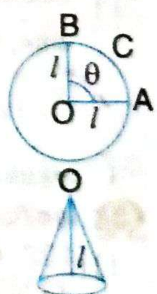
বা, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $l^2 = h^2 + r^2$

বা, (তির্যক উচ্চতা)^2 = (উচ্চতা)^2 + (ব্যাসার্ধ)^2

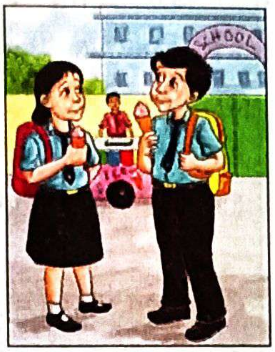


বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : l সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হল এবং বৃত্তটিকে কাঁচি দিয়ে কাটা হল। ওই বৃত্ত থেকে কেন্দ্রে θ কোণবিশিষ্ট একটি বৃত্তকলা OACB কাটা হল। এরপর আঠার সাহায্যে OA ও OB প্রান্ত দুটি জুড়ে দিলে একটি শঙ্কু উৎপন্ন হবে, যার তির্যক উচ্চতা হবে l একক। অর্থাৎ, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = l



লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু
(Right Circular Cone)

আকাশ, ঋদ্ধি, আজাদ ও ফতেমা স্কুলের টিফিনে ঠিক করল আজ তারা আইসক্রিম খাবে। তাই তারা তাদের প্রিয় রহিম চাচার কাছে গেল। রহিম চাচা প্রতিদিনই স্কুলের গেটের কাছে টিফিনের সময় বিভিন্ন ধরনের আইসক্রিম বিক্রয় করে। ওরা রহিম চাচার কাছে কুলপি আইসক্রিম চাইলে রহিম চাচা চার জনকে ত্রিকোণাকৃতি একটি বিস্কুটে আইসক্রিম ভরতি করে দিলেন যার মুখটি গোলাকার। ওরা আইসক্রিমের দাম দিয়ে খেলার মাঠের এক প্রান্তে বসে আইসক্রিম খেতে লাগল। হঠাৎ ঋদ্ধি প্রশ্ন করল "তোরা বলত এর মধ্যে কতটা আইসক্রিম আছে?" এরূপ প্রশ্ন শুনে সবাই অবাক। আজাদ বলল "তা তো জানি না"। আকাশ বলল "চল আমরা অঙ্ক স্যারের কাছে এর উত্তরটি জেনে আসি।" তখন ওরা অঙ্কের স্যার অশোকবাবুর কাছে গিয়ে প্রশ্নটা করল। অশোকবাবু প্রশ্নটা শুনে বললেন, "বাঃ! খুব ভালো প্রশ্ন করেছ তোমরা, কিন্তু এটা জানতে গেলে আগে জানতে হবে যার মধ্যে আইসক্রিম আছে তার আকারকে কী বলে, তার আয়তন কী ইত্যাদি।" স্যার বললেন এই আকৃতির বস্তুটিকে শঙ্কু বলে। আমরা প্রতিনিয়ত যেসমস্ত ঘনবস্তু দেখি তাদের মধ্যে শঙ্কু অন্যতম। শঙ্কু একটি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

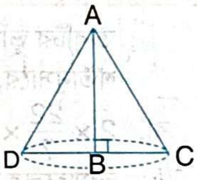


তখন ফতেমা বলল, "তাহলে এই আইসক্রিমটি একটি শঙ্কু।" স্যার বললেন, "একদম ঠিক।" এরপর অশোকবাবু শঙ্কু আকৃতির আরও কিছু জিনিসের নাম জানতে চাইলেন। তখন ওরা জন্মদিনের টুপি, ফানেল, তাঁবু,বরের টোপর এরকম কিছু উদাহরণ দিল। পরে অঙ্কের ক্লাসে স্যার শঙ্কুর ইতিবৃত্তের মাধ্যমে শঙ্কু সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করলেন।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট (Historical Background) : ভারতের অন্যতম জ্যোতির্বিদ ও গণিতজ্ঞ ভাস্করাচার্য 1114 খ্রিস্টাব্দে দাক্ষিণাত্যে জন্মগ্রহণ করেন। ভাস্করাচার্য সিদ্ধান্ত শিরোমণি গ্রন্থ প্রণয়ন করেন। এই গ্রন্থের চারটি ভাগের প্রথম ভাগ লীলাবতীতে পাটীগণিত ও পরিমিতি নিয়ে আলোচনা পাওয়া যায়। গ্রিক গণিতজ্ঞদের বিভিন্ন আলোচনায় অন্যান্য ঘনবস্তুসমূহের (গোলক, বেলন ইত্যাদি) পরিচয় পাওয়া গেলেও লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তেমন কোনো সুনির্দিষ্ট তথ্য পাওয়া যায় না। তবে সম্ভবত ইউক্লিডের জ্যামিতি যেখানে শেষ হয়েছিল তারপর থেকে আর্কিমিডিস (খ্রিস্টপূর্ব 287–212 অব্দ)-এর বিভিন্ন আলোচনায় শঙ্কু, পিরামিড ও গোলক-এর উল্লেখ পাওয়া যায়।

অধ্যায় সংক্রান্ত প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা ও তার সূত্রাবলী

লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু (Right Circular Cone) : একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু বলে। চিত্রে $\triangle ABC$-এর $\angle ABC = 90°$। AB-কে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে 360° ঘোরানোর ফলে ACD শঙ্কু উৎপন্ন হয়েছে।



অক্ষ (Axis) বা উচ্চতা (Height) : সমকোণী ত্রিভুজের যে বাহুর সাপেক্ষে ত্রিভুজকে 360° ঘোরানোর ফলে শঙ্কুটি উৎপন্ন হয়, তাকে শঙ্কুর অক্ষ বলে। একে শঙ্কুর উচ্চতাও বলা হয়ে থাকে। উপরের চিত্রানুযায়ী AB হল শঙ্কুর অক্ষ বা উচ্চতা।

ভূমি বা ভূমিতল (Base) : অক্ষ ছাড়া সমকোণ সংলগ্ন অপর বাহুটি (BC) বৃত্তাকারে আবর্তন করে। এই বৃত্তাকার তলকে ভূমি বা ভূমিতল বলে। চিত্রে CD-কে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার তল হল ভূমিতল এবং BC হল ভূমিতলের ব্যাসার্ধ।

তির্যক উচ্চতা (Slant Height) : সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্যকে তির্যক উচ্চতা বলে। চিত্রে AC হল শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা।

শীর্ষ (Vertex) : সমকোণ সংলগ্ন যে-কোনো একটি বাহুকে অক্ষ ধরে সমগ্র ত্রিভুজের পূর্ণ আবর্তনের সময় সমকৌণিক বিন্দু ব্যতীত অপর যে শীর্ষবিন্দু সর্বদা স্থির থাকে তাকে শঙ্কুর শীর্ষ বা শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে A হল শীর্ষ।

শীর্ষকোণ (Vertical Angle) : শঙ্কুর শীর্ষ ও তির্যক উচ্চতা মিলে যে কোণ উৎপন্ন করে তাই শীর্ষকোণ। শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে উৎপন্ন হয় অর্ধশীর্ষকোণ। চিত্রে $\angle CAD$ হল শীর্ষকোণ এবং $\angle CAB$ হল অর্ধশীর্ষকোণ।

বক্রতল বা পার্শ্বতল (Curved Surface) : শঙ্কুর উপরিভাগের বক্রতলকে পার্শ্বতল বা বক্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে বক্রতল বা পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (Curved Surface Area) বলে।

সমগ্রতল (Total Surface) : বক্রতল ও ভূমিতল মিলে যে তল তৈরি করে তাকে সমগ্রতল বলে এবং ওই তলের ক্ষেত্রফলকে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Total Surface Area) বলে।

আয়তন (Volume) : শঙ্কু আকৃতির ফাঁপা পাত্রে যে পরিমাণ জিনিস ধরে বা নিরেট শঙ্কু তৈরি করতে যে পরিমাণ পদার্থ লাগে তার পরিমাণকেই শঙ্কুর আয়তন বলে।

তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r)—এর মধ্যে সম্পর্ক : লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ক্ষেত্রে তির্যক উচ্চতা (l), উচ্চতা (h) ও ভূমির ব্যাসার্ধ (r) মিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC গঠন করে।

$\therefore$ BC = r, AB = h ও AC = l

এবং $\angle ABC = 90°$

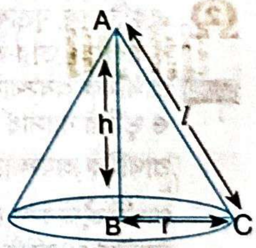
$\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

(অতিভুজ)^2 = (লম্ব)^2 + (ভূমি)^2

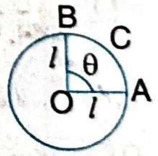
বা, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $l^2 = h^2 + r^2$

বা, (তির্যক উচ্চতা)^2 = (উচ্চতা)^2 + (ব্যাসার্ধ)^2



বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় : l সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকা হল এবং বৃত্তটিকে কাঁচি দিয়ে কাটা হল। ওই বৃত্ত থেকে কেন্দ্রে θ কোণবিশিষ্ট একটি বৃত্তকলা OACB কাটা হল। এরপর আঠার সাহায্যে OA ও OB প্রান্ত দুটি জুড়ে দিলে একটি শঙ্কু উৎপন্ন হবে, যার তির্যক উচ্চতা হবে l একক। অর্থাৎ, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = l



ধরি, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক

∴ শঙ্কুর ভূমির পরিধি = $2\pi r$ = বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য

এক্ষেত্রে, $\overset{\frown}{ACB}$ বৃত্তকলার চাপ = $\frac{2\pi l \times \theta}{360}$

∴ $\frac{2\pi l \times \theta}{360} = 2\pi r$

∴ $\theta = \frac{360 \times 2\pi r}{2\pi l} = \frac{360r}{l}$

বৃত্তকলা OACB-এর ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi l^2 \times \theta}{360}$ বর্গএকক

$= \frac{\pi l^2}{360} \times \frac{360r}{l}$ বর্গএকক = πrl বর্গএকক

∴ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

= πrl বর্গএকক

∴ শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গএকক

∴ শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi rl + \pi r^2)$ বর্গএকক

= $\pi r(l + r)$ বর্গএকক

আয়তন নির্ণয় : একই ভূমির ব্যাসার্ধ ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির পাত্র ও একটি চোঙাকৃতি পাত্র নেওয়া হল। শঙ্কু আকৃতির পাত্রটিতে জল ভরে চোঙাকৃতি পাত্রে ঢালা হল। দেখা গেল তিন বার ঢালার পর চোঙাকৃতি পাত্রটি ভর্তি হল। এ থেকে বোঝা যায় শঙ্কুর আয়তন চোঙের আয়তনের $\frac{1}{3}$ গুণ।

চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক ও উচ্চতা = h হলে চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘনএকক।

∴ শঙ্কুর আয়তন = $\left(\frac{1}{3} \times \pi r^2 h\right)$ ঘনএকক = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

এক নজরে

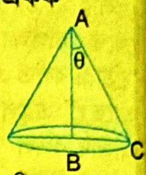
কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = l একক, উচ্চতা = h একক ও ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক হলে,

(1) $(\text{তির্যক উচ্চতা})^2 = (\text{উচ্চতা})^2 + (\text{ব্যাসার্ধ})^2$

বা, $l^2 = r^2 + h^2$

(2) শঙ্কুর বক্রতল বা পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গএকক

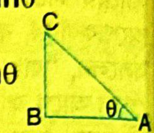
(3) শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi rl + \pi r^2)$ বর্গএকক = $\pi r(l + r)$ বর্গএকক



(4) শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

(5) শঙ্কুটির অর্ধশীর্ষকোণ $\angle BAC = \theta$ হলে,

(a) $\frac{BC}{AB} = \tan\theta$ বা, $\frac{r}{h} = \tan\theta$ বা, $r = h\tan\theta$



(b) $\frac{BC}{AC} = \sin\theta$ বা, $\frac{r}{l} = \sin\theta$ বা, $r = l\sin\theta$

(c) $\frac{AB}{AC} = \cos\theta$ বা, $\frac{h}{l} = \cos\theta$ বা, $h = l\cos\theta$

(6) অর্ধশীর্ষকোণ θ হলে শীর্ষকোণ = 2θ

প্রয়োগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্নাবলি (মান-2)

1. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির পরিধি 88 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 2 ডেসিমি। শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। *[Uttarpara Govt High School '17]*

সমাধান শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা (l) = 2 ডেসিমি = 20 সেমি

ধরি, শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ = r সেমি

∴ ভূমির পরিধি = $2\pi r$ সেমি

প্রশ্নানুসারে, $2\pi r = 88$ বা, $\pi r = 44$

∴ শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গসেমি

= (44 × 20) বর্গসেমি = 880 বর্গসেমি

2. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফল দ্বিগুণ করা হলে, তার আয়তন আগের আয়তনের কতগুণ হবে?

সমাধান প্রাথমিক অবস্থায় শঙ্কুর উচ্চতা = h একক ও ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক

∴ প্রাথমিক অবস্থায় শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

প্রাথমিক অবস্থায় শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গএকক

উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফল দ্বিগুণ করা হলে, উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফল হয় যথাক্রমে 2h একক ও $2\pi r^2$ বর্গএকক

এখন, শঙ্কুর আয়তন = $(\frac{1}{3} \times 2\pi r^2 \times 2h)$ ঘনএকক

= $(4 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h)$ ঘনএকক

= 4 × প্রাথমিক অবস্থায় শঙ্কুর আয়তন

∴ বর্তমান আয়তন আগের আয়তনের 4 গুণ হবে।

3. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাঁবুর ছাউনি তৈরি করতে 132 বর্গমিটার ত্রিপল লাগে। ছাউনির ভূমিতলের পরিধি 33 মিটার হলে, ছাউনির তির্যক উচ্চতা কত?

সমাধান তাঁবুটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধ = r মিটার

তাঁবুটির ভূমিতলের পরিধি = $2\pi r$ মিটার

শর্তানুসারে, $2\pi r = 33$

বা, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 33$ বা, $r = \frac{33 \times 7}{2 \times 22}$ বা, $r = \frac{21}{4}$

∴ ভূমিতলের ব্যাসার্ধ = $\frac{21}{4}$ মিটার

তাঁবুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\pi rl = 132$ (l = তির্যক উচ্চতা)

বা, $\frac{22}{7} \times \frac{21}{4} \times l = 132$

[ত্রিপলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল]

বা, $l = \frac{132 \times 4 \times 7}{22 \times 21} = 8$

∴ তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা 8 মিটার।

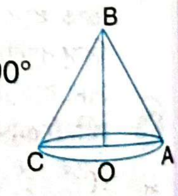
4. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ $2\sqrt{2}$ সেমি এবং অর্ধশীর্ষকোণ 45° হলে, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা কত? *[Krishnagar Govt Girls' School '16]*

সমাধান শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ (OA) = $2\sqrt{2}$ সেমি

অর্ধশীর্ষকোণ ($\angle ABO$) = 45°

ধরি, তির্যক উচ্চতা (AB) = l সেমি

চিত্রে, ΔOAB সমকোণী যার $\angle AOB = 90°$



∴ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \sin 45°$

∴ $\frac{OA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $AB = \sqrt{2} \times OA$ বা, $l = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

∴ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 4 সেমি।

5 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ ও তির্যক উচ্চতার অনুপাত 4 : 7। যদি শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল 792 বর্গসেমি হয়, তবে শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ কত?
[Suniti Academy, Cooch Behar '17]

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ : তির্যক উচ্চতা = 4 : 7

ধরি, ব্যাসার্ধ = $4x$ সেমি ও তির্যক উচ্চতা = $7x$ সেমি

যেখানে $x \neq 0$, একটি অশূন্য ধ্রুবক

$\therefore$ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r l$ বর্গসেমি

$= (\frac{22}{7} \times 4x \times 7x)$ বর্গসেমি = $88x^2$ বর্গসেমি

শর্তানুসারে, $88x^2 = 792$ বা, $x^2 = \frac{792}{88} = 9$ বা, $x = 3$

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ = (4×3) সেমি = 12 সেমি

6 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল A, পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল P এবং তির্যক উচ্চতা l হলে, দেখাও যে $P^2 = \pi A l^2$।
[Hare School '17]

সমাধান ধরি, শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ = r একক

$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল (A) = πr^2 বর্গএকক

পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (P) = $\pi r l$ বর্গএকক

$\therefore$ $P = \pi r l$

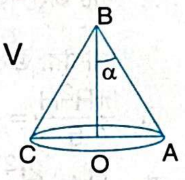
বা, $P^2 = (\pi r l)^2$ (উভয়দিকে বর্গ করে)

$= \pi^2 r^2 l^2 = \pi.\pi r^2 l^2 = \pi.A l^2$ (প্রমাণিত)

7 কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h, অর্ধশীর্ষকোণ α ও আয়তন V হলে, প্রমাণ করো $V = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$।
[R K Mission Vidyabhaban, Midnapore '16]

সমাধান শঙ্কুর উচ্চতা (OB) = h,

অর্ধশীর্ষকোণ ($\angle ABO$) = α ও আয়তন = V



$\therefore$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

যেখানে, r = ভূমির ব্যাসার্ধ = OA

ΔOAB থেকে পাই,

$\frac{OA}{OB} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\alpha$ বা, $\frac{r}{h} = \tan\alpha$ বা, $r = h\tan\alpha$

$\therefore$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$ (প্রমাণিত)

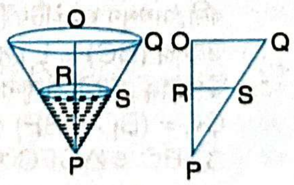
8 10 ডেসিমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির পাত্রে কিছু পরিমাণ জল রাখা আছে। শীর্ষ থেকে জলতলের উচ্চতা 5 ডেসিমি এবং ব্যাসার্ধ 2 ডেসিমি। আর কত লিটার জল ঢাললে শঙ্কু আকৃতির পাত্রটি কানায় কানায় পূর্ণ হবে?
[Tamluk Hamilton High School '17]

সমাধান শঙ্কুর উচ্চতা (OP) = 10 ডেসিমি

ধরি, শঙ্কুর ব্যাসার্ধ (OQ) = r ডেসিমি

জলতলের উচ্চতা (RP) = 5 ডেসিমি ও ব্যাসার্ধ (RS) = 2 ডেসিমি

ΔOPQ ও ΔRPS সদৃশকোণী



$\therefore$ $\frac{OP}{RP} = \frac{OQ}{RS}$

বা, $\frac{10}{5} = \frac{r}{2}$ বা, $r = 4$

$\therefore$ শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ = 4 ডেসিমি

$\therefore$ শঙ্কুটির আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনডেসিমি

$= (\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 10)$ ঘনডেসিমি = $\frac{160\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

শঙ্কু আকৃতির জলের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনডেসিমি

$= (\frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 5)$ ঘনডেসিমি = $\frac{20\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

$\therefore$ খালি অংশটির আয়তন = $\left(\frac{160\pi}{3} - \frac{20\pi}{3}\right)$ ঘনডেসিমি

$= \frac{140\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

$= \left(\frac{140}{3} \times \frac{22}{7}\right)$ ঘনডেসিমি

$= \frac{440}{3}$ ঘনডেসিমি

$\therefore$ আর $\frac{440}{3}$ ঘনডেসিমি বা $\frac{440}{3}$ লিটার জল ঢালতে হবে।

[1 ঘনডেসিমি = 1 লিটার]

9 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 5 সেমি। খেলনাটির সমগ্রতল প্রতি বর্গসেমি 0.07 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 19.80 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা নির্ণয় করো। *[Madhyamik '86] [High Madrasah '89]*

সমাধান শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{\text{মোট খরচ}}{\text{প্রতি বর্গসেমিতে খরচ}}$

$= \frac{19.80}{0.07}$ বর্গসেমি = $\frac{1980}{7}$ বর্গসেমি

ধরি, শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = l সেমি,

ভূমিতলের ব্যাসার্ধ = r সেমি

$\therefore$ শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi r l + \pi r^2)$ বর্গসেমি

$= \pi r(l + r)$ বর্গসেমি

শর্তানুসারে, $\pi r(l + r) = \frac{1980}{7}$

বা, $\frac{22 \times 5}{7}(l + 5) = \frac{1980}{7}$

বা, $l + 5 = \frac{1980}{5 \times 22}$

বা, $l + 5 = 18$ বা, $l = 18 - 5$ বা, $l = 13$

$\therefore$ শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা = 13 সেমি

আমরা জানি, $l^2 = h^2 + r^2$ [h = শঙ্কুর উচ্চতা]

বা, $h^2 = l^2 - r^2$ বা, $h^2 = (13)^2 - (5)^2$

বা, $h^2 = 169 - 25$ বা, $h^2 = 144$ বা, $h = 12$

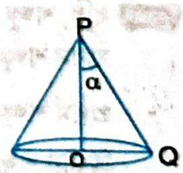
$\therefore$ শঙ্কুটির উচ্চতা 12 সেমি।

10 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h এবং অর্ধশীর্ষকোণ α হলে, দেখাও যে $\text{cosec}\alpha \sec\alpha = \frac{r}{h} + \frac{h}{r}$

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ (OQ) = r,

উচ্চতা (OP) = h এবং অর্ধশীর্ষকোণ $\angle OPQ = \alpha$

$\therefore$ ΔOPQ সমকোণী যার $\angle POQ = 90°$



$\therefore$ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{OQ}{OP} = \tan\alpha$

বা, $\frac{r}{h} = \tan\alpha$ বা, $\frac{h}{r} = \cot\alpha$

$\therefore$ $\frac{r}{h} + \frac{h}{r} = \tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha \sin\alpha} = \sec\alpha \, \text{cosec}\alpha$

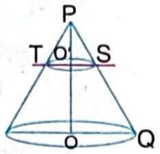
(প্রমাণিত)

11 **একটি শঙ্কু থেকে ভূমির সমান্তরাল সমতল দ্বারা উপরের অংশ কেটে ফেলা হল; মস্তকবিহীন অংশের ব্যাসার্ধ r সেমি। শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ R সেমি এবং উচ্চতা K সেমি হলে, দেখাও যে উহার আয়তন = $\frac{\pi K}{3}(R^2 + rR + r^2)$ ঘনসেমি।**

সমাধান ধরি, শঙ্কুটির উচ্চতা (OP) = h সেমি,

ভূমির ব্যাসার্ধ (OQ) = R সেমি ও

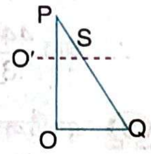
(O′S) = r সেমি



∴ শঙ্কুটির আয়তন = $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ ঘনসেমি

PTS শঙ্কুটির উচ্চতা PO′ = OP – OO′

= h – K (OO′ = K)



আবার, ΔOPQ ও ΔO′PS সদৃশকোণী

$\therefore \frac{OP}{OQ} = \frac{PO'}{O'S}$

বা, $\frac{h}{R} = \frac{h-K}{r}$ বা, $R(h-K) = rh$ বা, $Rh - rh = RK$

বা, $h(R-r) = RK$ বা, $h = \frac{RK}{R-r}$ ... (i)

ছোটো শঙ্কু (PTS)-র আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h-k)$ ঘনসেমি

∴ মস্তকবিহীন অংশের আয়তন

$= \left[\frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 (h-K)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi (R^2 h - r^2 h + r^2 K)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi \left(R^2 . \frac{RK}{R-r} - r^2 . \frac{RK}{R-r} + r^2 K\right)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi K \left(\frac{R^3}{R-r} - \frac{r^2 R}{R-r} + r^2\right)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi K \left(\frac{R^3 - \cancel{r^2 R} + \cancel{r^2 R} - r^3}{R-r}\right)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi K \left(\frac{R^3 - r^3}{R-r}\right)\right]$ ঘনসেমি

$= \left[\frac{1}{3}\pi K \left(\frac{\cancel{(R-r)}\,(R^2 + Rr + r^2)}{\cancel{(R-r)}}\right)\right]$ ঘনসেমি

$= \frac{\pi K}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ ঘনসেমি **(প্রমাণিত)**

12 **লোহার তৈরি দুটি নিরেট সরল বৃত্তীয় শঙ্কুর উচ্চতা একই। শঙ্কু দুটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 সেমি এবং r_2 সেমি। ওই শঙ্কু দুটিকে গলিয়ে R সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। প্রমাণ করো যে, প্রতিটি শঙ্কুর উচ্চতা $\frac{4R^3}{r_1^2 + r_2^2}$ সেমি।** *[Madhyamik (Ext) '85]*

সমাধান ধরি, শঙ্কু দুটির প্রতিটির উচ্চতা h সেমি

প্রথম শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ r_1 সেমি ও উচ্চতা h সেমি

∴ প্রথম শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r_1^2 h$ ঘনসেমি

দ্বিতীয় শঙ্কুর ব্যাসার্ধ r_2 সেমি ও উচ্চতা h সেমি

∴ দ্বিতীয় শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r_2^2 h$ ঘনসেমি

R সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের আয়তন

$= \frac{4}{3}\pi R^3$ ঘনসেমি

শর্তানুসারে, শঙ্কু দুটির মোট আয়তন = গোলকের আয়তন

বা, $\frac{1}{3}\pi r_1^2 h + \frac{1}{3}\pi r_2^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$

বা, $\frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r_2^2) = \frac{4}{3}\pi R^3$ বা, $h(r_1^2 + r_2^2) = 4R^3$

বা, $h = \frac{4R^3}{r_1^2 + r_2^2}$

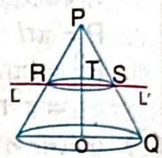
∴ প্রতিটি শঙ্কুর উচ্চতা = $\frac{4R^3}{r_1^2 + r_2^2}$ সেমি **(প্রমাণিত)**

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্নাবলি (মান-4)

13 **ভূমির সঙ্গে সমান্তরাল একটি তল কোনো শঙ্কুকে দুটি সমান আয়তনে বিভক্ত করে। শঙ্কুর উচ্চতা কী অনুপাতে বিভক্ত হবে?** *[Madhyamik '94]*

সমাধান মনে করি, শঙ্কুটির উচ্চতা (OP) = H একক ও ভূমির ব্যাসার্ধ (OQ) = R একক। ভূমির সমান্তরাল একটি তল LL′ শঙ্কুটিকে দুটি সমআয়তনে ভাগ করে।

উপরের অংশটি একটি শঙ্কু যার উচ্চতা (PT) = h একক ও ব্যাসার্ধ (TS) = r একক।



ΔOPQ ও ΔPTS সদৃশকোণী

$\therefore \frac{OP}{OQ} = \frac{PT}{TS}$ বা, $\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$

$\therefore \frac{H}{h} = \frac{R}{r}$ ...(i)

শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ ঘনএকক

∴ দুটি অংশের প্রত্যেকটির আয়তন = $\frac{\pi R^2 H}{3 \times 2}$ ঘনএকক

আবার, উপরের অংশের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

$\therefore \frac{\pi R^2 H}{6} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ বা, $R^2 H = 2r^2 h$

বা, $\frac{H}{h} = \frac{2r^2}{R^2}$ বা, $\frac{H}{h} = \frac{2h^2}{H^2}$ [(i) নং থেকে]

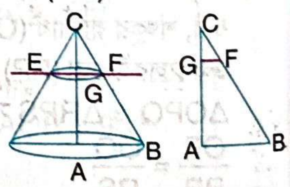
বা, $\frac{H^3}{h^3} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{H}{h} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1}$ বা, $\frac{H-h}{h} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{1}$

বা, $\frac{TO}{TP} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{1}$ বা, $TO : TP = (\sqrt[3]{2}-1) : 1$

∴ শঙ্কুর উচ্চতাকে $(\sqrt[3]{2}-1) : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করবে।

14 **একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু থেকে ভূমির সমান্তরাল সমতল দ্বারা উপরের অংশ কেটে ফেলা হল। মস্তকবিহীন উপরের অংশের ও নীচের অংশের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r সেমি ও R সেমি এবং তির্যক উচ্চতা *l* সেমি হলে, দেখাও যে, উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi[R^2 + r^2 + l(R + r)]$ বর্গসেমি।**

সমাধান মস্তকবিহীন উপরের অংশের ব্যাসার্ধ (GF) = r সেমি ও নীচের অংশের ব্যাসার্ধ (AB) = R সেমি এবং তির্যক উচ্চতা (BF) = *l* সেমি



ধরি, সম্পূর্ণ শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা (BC) = L সেমি

∴ উপরের ছোটো শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা

CF = (BC – BF) সেমি = (L – *l*) সেমি

ΔABC ও ΔGFC সদৃশকোণী

$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{CF}{GF}$ বা, $\frac{L}{R} = \frac{L-l}{r}$ বা, $LR - Rl = rL$

বা, $L(R-r) = Rl$ বা, $L = \frac{Rl}{R-r}$

সম্পূর্ণ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi RL$ বর্গসেমি

$= \pi R.\dfrac{Rl}{R-r}$ বর্গসেমি $= \pi R^2\dfrac{l}{R-r}$ বর্গসেমি

ছোটো শঙ্কুর ক্ষেত্রফল $= \pi r(L-l) = \pi r\left(\dfrac{Rl}{R-r} - l\right)$

$= \pi r\left(\dfrac{\cancel{Rl} - \cancel{Rl} + rl}{R-r}\right)$ বর্গসেমি $= \pi r\left(\dfrac{rl}{R-r}\right)$ বর্গসেমি

∴ মস্তকবিহীন অংশের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \left(\pi R^2\dfrac{l}{R-r} - \dfrac{\pi r^2 l}{R-r} + \pi R^2 + \pi r^2\right)$ বর্গসেমি

$= \pi\left\{\left(\dfrac{R^2 l}{R-r} - \dfrac{r^2 l}{R-r}\right) + R^2 + r^2\right\}$ বর্গসেমি

$= \pi\left\{\dfrac{l(R^2 - r^2)}{R-r} + R^2 + r^2\right\}$ বর্গসেমি

$= \pi\left\{\dfrac{l(R+r)(R-r)}{(R-r)} + R^2 + r^2\right\}$ বর্গসেমি

$= \pi\left\{l(R+r) + R^2 + r^2\right\}$ বর্গসেমি **(প্রমাণিত)**

15 **18 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তাকার কাগজের টুকরো থেকে বৃত্তকলা কেটে নেওয়া হল যা কেন্দ্রে 120° কোণ উৎপন্ন করে। এটিকে এমনভাবে ভাঁজ করা হল যাতে প্রান্তিক ব্যাসার্ধ দুটি একসঙ্গে মিলে একটি শঙ্কু তৈরি করে। এই শঙ্কুটির আয়তন নির্ণয় করো। ($\sqrt{2} = 1.414$)**

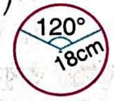
সমাধান বৃত্তাকার কাগজের ব্যাসার্ধ = 18 সেমি

∴ বৃত্তাকার কাগজের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গসেমি

$= \left(\dfrac{22}{7} \times 18 \times 18\right)$ বর্গসেমি

কেন্দ্রে 120° কোণ বিশিষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$= \left(\dfrac{\pi r^2}{\cancel{360°}_{3}} \times \cancel{120°}\right)$ বর্গসেমি $= \left(\dfrac{22 \times 18 \times \cancel{18}^{6}}{7 \times \cancel{3}}\right)$ বর্গসেমি



$= \left(\dfrac{22 \times 108}{7}\right)$ বর্গসেমি

বৃত্তকলা দ্বারা উৎপন্ন শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 18 সেমি

ধরি, শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ = r সেমি

∴ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

বা, $\pi r l = \dfrac{22}{7} \times 108$ বা, $\dfrac{\cancel{22}}{\cancel{7}} \times r \times 18 = \dfrac{\cancel{22}}{\cancel{7}} \times 108$

বা, $r = \dfrac{\cancel{108}^{6}}{\cancel{18}} = 6$ ∴ শঙ্কুর ব্যাসার্ধ = 6 সেমি

∴ শঙ্কুর উচ্চতা (h) $= \sqrt{l^2 - r^2}$ একক $= \sqrt{(18)^2 - 6^2}$ সেমি

$= \sqrt{324 - 36}$ সেমি $= \sqrt{288}$ সেমি $= 12\sqrt{2}$ সেমি

∴ শঙ্কুটির আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনসেমি

$= \left(\dfrac{1}{\cancel{3}} \times \dfrac{22}{7} \times \cancel{36}^{12} \times 12\sqrt{2}\right)$ ঘনসেমি

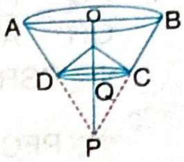
$= \left(\dfrac{22 \times 144\sqrt{2}}{7}\right)$ ঘনসেমি

$= \left(\dfrac{22 \times 144 \times 1.414}{7}\right)$ ঘনসেমি = 639.936 ঘনসেমি

16 **শঙ্কুচ্ছেদ আকৃতির কাঠের গুঁড়ির উপরের তলের ব্যাস 6 ডেসিমি এবং নীচের তলের ব্যাস 4 ডেসিমি, উচ্চতা 8 ডেসিমি। গুঁড়িটি থেকে 4 ডেসিমি ব্যাস এবং 3 ডেসিমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কুকে কেটে বার করা হল। 1 ঘনডেসিমি কাঠের ওজন 3 কেজি 200 গ্রাম হলে শঙ্কু বাদ দিয়ে অবশিষ্ট কাঠের গুঁড়ির ওজন কত?** *[Bankura Zilla School '16]*

সমাধান ধরি, ABCD হল শঙ্কুচ্ছেদ আকৃতির কাঠের গুঁড়ি যার উপরের ব্যাস (AB) = 6 ডেসিমি ও নীচের ব্যাস (DC) = 4 ডেসিমি

শঙ্কুর প্রান্ত দুটি BC ও AD-কে বর্ধিত করলে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে এবং একটি পূর্ণ শঙ্কু হয়।



ধরি, QP = x ডেসিমি

∴ OP = OQ + QP = $(8 + x)$ ডেসিমি

∴ ΔAPO ও ΔDPQ সদৃশকোণী

∴ $\dfrac{OP}{QP} = \dfrac{AO}{DQ}$ বা, $\dfrac{8+x}{x} = \dfrac{3}{2}$

$\left[AO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3;\ DQ = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\right]$

বা, $3x = 16 + 2x$ বা, $x = 16$

∴ OP = (16 + 8) ডেসিমি = 24 ডেসিমি

শঙ্কু ABP-এর আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

$= \left(\dfrac{1}{\cancel{3}}\pi \times \cancel{9}^{3} \times 24\right)$ ঘন ডেসিমি $= 72\pi$ ঘনডেসিমি

শঙ্কু DCP-এর আয়তন $= \left(\dfrac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 16\right)$ ঘনডেসিমি

$= \dfrac{64\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

∴ শঙ্কুচ্ছেদ কাঠের গুঁড়ির আয়তন

$= \left(72\pi - \dfrac{64\pi}{3}\right)$ ঘনডেসিমি $= \left(\dfrac{216\pi - 64\pi}{3}\right)$ ঘনডেসিমি

$= \dfrac{152\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

যে শঙ্কুটি কাটা হবে তার ব্যাসার্ধ = 2 ডেসিমি ও উচ্চতা = 3 ডেসিমি

∴ শঙ্কুটির আয়তন $= \left(\dfrac{1}{\cancel{3}}\pi \times 2^2 \times \cancel{3}\right)$ ঘনডেসিমি

$= 4\pi$ ঘনডেসিমি

∴ অবশিষ্ট কাঠের গুঁড়ির আয়তন $= \left(\dfrac{152\pi}{3} - 4\pi\right)$ ঘনডেসিমি

$= \left(\dfrac{152\pi - 12\pi}{3}\right)$ ঘনডেসিমি $= \dfrac{140\pi}{3}$ ঘনডেসিমি

$= \left(\dfrac{\cancel{140}^{20}}{3} \times \dfrac{22}{\cancel{7}}\right)$ ঘনডেসিমি $= \dfrac{440}{3}$ ঘনডেসিমি

∴ অবশিষ্ট কাঠের গুঁড়ির ওজন $= \left(\dfrac{440}{3} \times 3.200\right)$ কিগ্রা

$= \left(\dfrac{440 \times 3.2}{3}\right)$ কিগ্রা $= \left(\dfrac{44\cancel{0} \times 32}{3 \times 1\cancel{0}}\right)$ কিগ্রা

= 469.33 কিগ্রা (প্রায়)

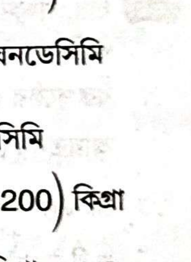
17 **একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির সমান্তরালভাবে অঙ্কিত দুটি সমতল দ্বারা শঙ্কুটির উচ্চতাকে সমত্রিখণ্ডিত করা হল। দেখাও যে, শঙ্কুটি যে তিনটি অংশে বিভক্ত হয়, তাদের আয়তনের অনুপাত 1 : 7 : 19।** *[JEXPO '08, 98]*

সমাধান ধরি, শঙ্কুটির উচ্চতা (PQ) = h একক

ভূমির সমান্তরাল দুটি সমতল MM′ ও LL′ উচ্চতা PQ-কে সমত্রিখণ্ডিত করেছে।

∴ $PA = AB = BQ = \dfrac{h}{3}$ একক

আবার ধরি, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক এবং শঙ্কু PFC ও শঙ্কু PED-এর ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 একক ও r_2 একক।



∴ ΔPQR ও ΔPBC সদৃশকোণী।

∴ $\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{PB}{BC}$ বা, $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\frac{2h}{3}}{r_1}$ বা, $\dfrac{h}{r} = \dfrac{2h}{3r_1}$ বা, $r_1 = \dfrac{2r}{3}$

আবার, ΔPQR ও ΔPAD সদৃশকোণী

$\therefore \frac{PQ}{QR} = \frac{PA}{AD}$ বা, $\frac{h}{r} = \frac{\frac{h}{3}}{r_2}$ বা, $\frac{h}{r} = \frac{h}{3r_2}$ বা, $r_2 = \frac{r}{3}$

শঙ্কু PSR-এর আয়তন $(V) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

শঙ্কু PFC-এর আয়তন $(V_1) = \frac{1}{3}\pi r_1^2 \frac{2h}{3}$ ঘনএকক

$= \left[\frac{\pi}{3}\left(\frac{2r}{3}\right)^2 . \frac{2h}{3}\right]$ ঘনএকক $= \frac{8\pi r^2 h}{81}$ ঘনএকক

শঙ্কু PED-এর আয়তন $(V_2) = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \frac{h}{3}$ ঘনএকক

$= \left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 \frac{h}{3}\right]$ ঘনএকক $= \frac{\pi r^2 h}{81}$ ঘনএকক

শঙ্কুর নিম্নভাগের আয়তন $= (V - V_1)$ ঘনএকক

$= \left(\frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{8\pi r^2 h}{81}\right)$ ঘনএকক $= \frac{19\pi r^2 h}{81}$ ঘনএকক

শঙ্কুর মধ্যভাগের আয়তন $= (V_1 - V_2)$ ঘনএকক

$= \left(\frac{8\pi r^2 h}{81} - \frac{\pi r^2 h}{81}\right)$ ঘনএকক $= \frac{7\pi r^2 h}{81}$ ঘনএকক

শঙ্কুর উপরের অংশের আয়তন $(V_2) = \frac{\pi r^2 h}{81}$ ঘনএকক

$\therefore$ তিনটি অংশের আয়তনের অনুপাত

$= \frac{\pi r^2 h}{81} : \frac{7\pi r^2 h}{81} : \frac{19\pi r^2 h}{81} = 1 : 7 : 19$ **(প্রমাণিত)**

18 **একটি শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল S বর্গএকক, আয়তন V ঘনএকক এবং উচ্চতা h একক হলে, দেখাও যে, $3\pi Vh^3 - S^2h^2 + 9V^2 = 0$**

[Sunity Academy, Cooch Behar '18]

সমাধান ধরি, শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ = r একক, উচ্চতা = h একক ও তির্যক উচ্চতা = l একক

$\therefore$ বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $(S) = \pi r l$ বর্গএকক

আয়তন $(V) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

$\therefore 3\pi Vh^3 - S^2h^2 + 9V^2$

$= 3\pi . \frac{1}{3}\pi r^2 h . h^3 - \pi^2 r^2 l^2 h^2 + 9 . \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)^2$

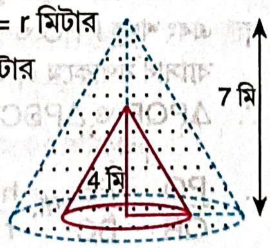
$= \pi^2 r^2 h^4 - \pi^2 r^2 (h^2 + r^2) h^2 + 9 . \frac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2$ $[\because l^2 = h^2 + r^2]$

$= \pi^2 r^2 h^4 - \pi^2 r^2 h^4 - \pi^2 r^4 h^2 + \pi^2 r^4 h^2$

$= 0$ **(প্রমাণিত)**

19 **একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির স্তম্ভের উচ্চতা 4 মিটার এবং তলদেশের পরিধি 11 মিটার। স্তম্ভটির উপর বালি ঢালতে থাকায় এরূপ একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির স্তূপ তৈরি হল যার উচ্চতা 7 মিটার এবং তলদেশের পরিধি 22 মিটার। স্তূপটিতে বালির পরিমাণ নির্ণয় করো।**

সমাধান ধরি, শঙ্কু আকৃতি স্তম্ভের ব্যাসার্ধ = r মিটার ও বালিসহ স্তম্ভের ব্যাসার্ধ = R মিটার স্তম্ভের ও বালিসহ স্তম্ভের ভূমির পরিধি যথাক্রমে 11 মিটার ও 22 মিটার।



$\therefore 2\pi r = 11$ বা, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$

বা, $r = \frac{11 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{4}$

এবং $2\pi R = 22$ বা, $2 \times \frac{22}{7} R = 22$ বা, $R = \frac{7}{2}$

$\therefore$ বালিসহ স্তুপের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi R^2 H$ ঘনমিটার

$= \left[\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 7\right]$ ঘনমিটার

শুধু স্তম্ভের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনমিটার

$= \left[\frac{1}{3}\pi . \left(\frac{7}{4}\right)^2 \times 4\right]$ ঘনমিটার

$\therefore$ বালির আয়তন $= \left\{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 7 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times 4\right\}$ ঘনমিটার

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{49}{4} \times 7 - \frac{49}{16} \times 4\right)$ ঘনমিটার

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4}(7 - 1)$ ঘনমিটার

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \times 6$ ঘনমিটার $= 77$ ঘনমিটার

$\therefore$ স্তূপটিতে বালি আছে 77 ঘনমিটার।

20 **সার্কাসের একটি তাঁবুর নীচের অংশ চোঙাকৃতি তার উপরের ছাদটি শঙ্কু আকৃতির। চোঙাকৃতি অংশে ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা যথাক্রমে 126 মিটার এবং 5 মিটার। তাঁবুটির মোট উচ্চতা 21 মিটার। প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাস বস্ত্রের মূল্য 12 টাকা হলে, ওই তাঁবুটির মোট মূল্য কত?**

সমাধান তাঁবুর চোঙাকৃতি অংশের ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{126}{2}$ মিটার $= 63$ মিটার ও উচ্চতা = 5 মিটার

$\therefore$ চোঙাকৃতি অংশের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গমিটার

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times 63 \times 5\right)$ বর্গমিটার $= (44 \times 45)$ বর্গমিটার

$= 1980$ বর্গমিটার

তাঁবুর শঙ্কু আকৃতি অংশের ব্যাসার্ধ 63 মিটার ও উচ্চতা $= (21 - 5) = 16$ মিটার

শঙ্কু আকৃতির অংশের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গমিটার

$= \left[\frac{22}{7} \times 63 \times \sqrt{(63)^2 + (16)^2}\right]$ বর্গমিটার

$= \left[\frac{22}{7} \times 63 \times 65\right]$ বর্গমিটার $= 12870$ বর্গমিটার

$\therefore$ তাঁবুটি তৈরি করতে মোট ক্যানভাস লাগবে

$= (1980 + 12870)$ বর্গমিটার $= 14850$ বর্গমিটার

1 বর্গমিটার ক্যানভাসের দাম 12 টাকা

$\therefore$ 14850 বর্গমিটার ক্যানভাসের দাম $= (12 \times 14850)$ টাকা

$= 178200$ টাকা

$\therefore$ তাঁবুটির মোট মূল্য 178200 টাকা।

21 **একটি নিরেট লৌহ গোলককে গলিয়ে 32টি সমআয়তনের শঙ্কু আকৃতির পেপার ওয়েট তৈরি করা হল। যদি প্রতিটি পেপার ওয়েটের উচ্চতা 4 সেমি ও ভূমির ব্যাস 1 সেমি হয়, তবে গোলকটির ব্যাস নির্ণয় করো।**

[WBCS '89]

সমাধান প্রতিটি পেপার ওয়েটের উচ্চতা 4 সেমি ও ভূমির ব্যাস 1 সেমি

$\therefore$ পেপার ওয়েটের ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2}$ সেমি

1টি পেপার ওয়েটের আয়তন = $\left[\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4\right]$ ঘনসেমি

∴ 32 টি পেপার ওয়েটের আয়তন = $\left[\frac{32}{3}\pi \times \frac{1}{4} \times 4\right]$ ঘনসেমি

$= \frac{32\pi}{3}$ ঘনসেমি

ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধ = r সেমি

∴ গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘনসেমি

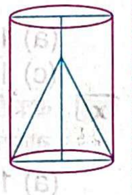
শর্তানুসারে, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32 \times \pi}{3}$

বা, $4r^3 = 32$ বা, $r^3 = 8$ বা, r = 2

∴ লোহার গোলকের ব্যাস = (2 × 2) সেমি = 4 সেমি

22 একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 30 সেমি এবং ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 7 সেমি। এই চোঙের একটি প্রান্ত থেকে 24 সেমি উচ্চতা ও 7 সেমি ভূমির ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি শঙ্কু কেটে নেওয়া হল। চোঙের অবশিষ্ট অংশের ঘনফল এবং সমগ্রতলের পরিমাণ নির্ণয় করো।

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 30 সেমি ও ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সেমি



∴ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘনসেমি

$= \left(\frac{22}{7} \times 7^2 \times 30\right)$ ঘনসেমি

= (22 × 7 × 30) ঘনসেমি = 4620 ঘনসেমি

কেটে নেওয়া শঙ্কুর উচ্চতা 24 সেমি ও ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সেমি

∴ কেটে নেওয়া শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনসেমি

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24\right)$ ঘনসেমি = (22×56) ঘনসেমি

= 1232 ঘনসেমি

∴ চোঙের অবশিষ্ট অংশের ঘনফল = (4620 − 1232) ঘনসেমি

= 3388 ঘনসেমি

আবার, চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $(2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গসেমি

কেটে নেওয়া শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(\pi rl + \pi r^2)$ বর্গসেমি

[l = তির্যক উচ্চতা]

চোঙের অবশিষ্ট অংশের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= (চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল − শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল) + শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল

$= [2\pi rh + 2\pi r^2 - (\pi rl + \pi r^2) + \pi rl]$ বর্গএকক

$= (2\pi rh + \pi r^2)$ বর্গসেমি

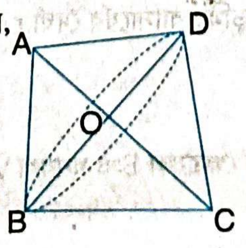
$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 30 + \frac{22}{7} \times 7 \times 7\right)$ বর্গসেমি

= (1320 + 154) বর্গসেমি = 1474 বর্গসেমি

23 একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় 6 সেমি ও 8 সেমি। সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজকে অক্ষ করে ত্রিভুজটিকে ঘোরালে যে শঙ্কু দুটি উৎপন্ন হয় তাদের মোট ঘনফল নির্ণয় করো।

[Sargachi R K Mission High School '17]

সমাধান ΔABC সমকোণী যার AB = 6 সেমি,



BC = 8 সেমি ও ∠ABC = 90°

অতিভুজ (AC) = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$ সেমি $= \sqrt{36 + 64}$ সেমি

$= \sqrt{100}$ সেমি = 10 সেমি

AC-কে অক্ষ করে ত্রিভুজটিকে ঘোরালে ABD ও BCD শঙ্কু দুটি উৎপন্ন হয় যাদের ব্যাসার্ধ একই এবং উচ্চতা OA ও OC

ধরি, শঙ্কু দুটির ব্যাসার্ধ (OB) = r সেমি এবং

উচ্চতা (AO) = x সেমি

∴ উচ্চতা (OC) = $(10 - x)$ সেমি

ΔABO থেকে পাই, $AO^2 + OB^2 = AB^2$

বা, $x^2 + r^2 = 6^2$ বা, $x^2 + r^2 = 36$ ... (i)

আবার, ΔBCO থেকে পাই,

$OB^2 + OC^2 = BC^2$

বা, $r^2 + (10 - x)^2 = 8^2$ বা, $r^2 + 100 - 20x + x^2 = 64$

বা, $r^2 + x^2 + 100 - 20x = 64$ বা, $36 + 100 - 20x = 64$

বা, $20x = 136 - 64$ বা, $20x = 72$ বা, $x = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}$

(i) নং থেকে পাই,

$r^2 = 36 - x^2$ বা, $r^2 = 36 - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = 36 - \frac{324}{25}$

বা, $r^2 = \frac{900 - 324}{25}$ বা, $r^2 = \frac{576}{25}$

∴ শঙ্কুদুটির মোট ঘনফল

$= \frac{1}{3}\pi (OB)^2 \times AO + \frac{1}{3}\pi (OB)^2 \times OC$

$= \frac{1}{3}\pi (OB)^2 (AO + OC)$

$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{576}{25} \times 10\right]$ ঘনসেমি = 241.37 ঘনসেমি (প্রায়)

24 একটি শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল একটি চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। যদি শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে h ও r এবং চোঙের উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে H ও r হয়, তবে দেখাও যে, $h^2 = (2H + r)(2H - r)$

সমাধান শঙ্কুর উচ্চতা = h একক এবং ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক

∴ তির্যক উচ্চতা (l) = $\sqrt{h^2+r^2}$ একক

শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl বর্গএকক = $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ বর্গএকক

চোঙের উচ্চতা = H একক ও ব্যাসার্ধ = r একক

∴ চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rH$ বর্গএকক

∴ $\pi r\sqrt{h^2+r^2} = 2\pi rH$ বা, $r^2(h^2 + r^2) = 4r^2H^2$

বা, $r^2h^2 + r^4 = 4r^2H^2$ বা, $r^2h^2 = 4r^2H^2 - r^4$

বা, $r^2h^2 = r^2(4H^2 - r^2)$ বা, $h^2 = (2H + r)(2H - r)$

(প্রমাণিত)

অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্নাবলি (মান-1)

25 সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো

i একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা, তির্যক উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাস যথাক্রমে h, l, d হলে, $\frac{l^2-h^2}{d^2}$-এর মান—

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 4 **c**

ii শঙ্কুর ক্ষেত্রে বৃত্তকলা বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা l হলে, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল—

(a) $\frac{\theta}{180} \times \pi l^2$ (b) $\frac{\theta}{90} \times \pi l^2$

(c) $\frac{\theta}{360} \times \pi l^2$ (d) $\frac{\theta}{270} \times \pi l^2$ **c**

iii একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির পাত্র জলপূর্ণ আছে। অন্য একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে এই জল ঢালা হল। যদি শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে h এবং r হয় এবং চোঙাকৃতি পাত্রের ব্যাসার্ধ 3r হয়। তবে, চোঙাকৃতি পাত্রে ঢালা জলের উচ্চতা হবে—

(a) 27h (b) $\frac{h}{27}$ (c) 9h (d) $\frac{h}{9}$ **b**

iv একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফল 100% করে বাড়ানো হলে, তার আয়তন হবে পূর্বের আয়তনের—

(a) 3 গুণ (b) 4 গুণ
(c) 5 গুণ (d) 6 গুণ। **b**

v l_1 ও l_2 তির্যক উচ্চতাবিশিষ্ট দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে S_1 ও S_2; যদি $l_1 : l_2 = 4 : 9$ এবং শঙ্কুদ্বয়ের শীর্ষকোণ একই হয়, তবে $S_1 : S_2$ হবে—

(a) 2 : 3 (b) 4 : 9 (c) 16 : 81 (d) 8 : 9 **b**

vi একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা তার ভূমির ব্যাসার্ধের তিনগুণ হলে, ভূমির ক্ষেত্রফল ও পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হবে—

[Krishnagar Collegiate School '17]

(a) 1 : 3 (b) 1 : 2 (c) 2 : 3 (d) 3 : 2 **a**

vii কোনো শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা যদি শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতার গুণফলের $\frac{1}{3}$ অংশ হয়, তবে শঙ্কুটির আয়তন—

[Ballygunge Govt High School '16]

(a) তির্যক তলের ক্ষেত্রফলের সমান
(b) তির্যক তলের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{3}$ অংশের সমান
(c) তির্যক তলের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান
(d) কোনোটিই নয়। **a**

viii একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুদ্বয় 3 সেমি ও 4 সেমি। বড়ো বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটি ঘোরালে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ঘনফল কত?

[Burdwan Harisava Hindu Girls' High School '17]

(a) $37\frac{5}{7}$ ঘনসেমি (b) $50\frac{2}{7}$ ঘনসেমি
(c) $52\frac{3}{7}$ ঘনসেমি (d) এদের কোনোটিই নয়। **a**

ix একটি শঙ্কুর ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার অনুপাত 5 : 12, শঙ্কুটির আয়তন $314\frac{2}{7}$ ঘনসেমি হলে, এর তির্যক উচ্চতা—

[JEXPO '16]

(a) 13 সেমি (b) 14 সেমি
(c) 17 সেমি (d) 26 সেমি। **a**

x একটি শঙ্কুর উচ্চতা অপরিবর্তিত রেখে ব্যাসার্ধ 20% বাড়ালে, আয়তন বৃদ্ধি পাবে—

(a) 10% (b) 20% (c) 12% (d) 44% **d**

26 শূন্যস্থান পূরণ করো

	প্রশ্ন	উত্তর
i	একমুখ কাটা একটি পেন্সিলের আকার _____ ও _____ -এর সমন্বয়। *[Madhyamik '23, '18]*	চোঙ, শঙ্কু
ii	একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ সমান হলে, শঙ্কুর শীর্ষকোণের মান _____। *[Bidhannagar Govt High School '16]*	90°
iii	লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V, ভূমির ব্যাসার্ধ R এবং উচ্চতা H হলে, H = _____। *[Madhyamik '24]*	$\frac{3V}{\pi R^2}$

27 সত্য / মিথ্যা যাচাই করো

	প্রশ্ন	উত্তর
i	একই ভূমি ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু ও একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের আয়তনের অনুপাত 1 : 3 হবে। *[Madhyamik '19]*	সত্য
ii	একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাস d একক, উচ্চতা h একক এবং তির্যক উচ্চতা l একক হলে, $l^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$ *[Chakdaha Ramlal Academy (HS) '17]*	সত্য
iii	একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল S বর্গএকক, ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক হলে, শঙ্কুটির উচ্চতা $\frac{\sqrt{S^2+\pi^2 r^4}}{\pi r}$ একক।	মিথ্যা
iv	একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা h, অর্ধশীর্ষকোণ α, বক্রতলের ক্ষেত্রফল S ও ঘনফল V হলে, S : V = 3 : h sinα. *[Vidyasagar Vidyapith, Midnapore '16]*	সত্য

পাঠ্যপুস্তক-এর সমস্যার সমাধান

(কষে দেখি)

1. আমি একটি মুখবন্ধ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করেছি যার ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 15 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 24 সেমি। ওই শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ (r) = 15 সেমি

তির্যক উচ্চতা (l) = 24 সেমি

∴ শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r l = \left(\frac{22}{7}\times15\times24\right)$ বর্গসেমি

$= \frac{7950}{7}$ বর্গসেমি

$= 1131\frac{3}{7}$ বর্গসেমি

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r(l + r)$ বর্গসেমি

$=\left[\frac{22}{7}\times15(24+15)\right]$ বর্গসেমি $=\left[\frac{22}{7}\times15\times39\right]$ বর্গসেমি

$= \frac{12870}{7}$ বর্গসেমি $= 1838\frac{4}{7}$ বর্গসেমি

2. শঙ্কুর আয়তন নির্ণয় করি যখন, (i) ভূমির ক্ষেত্রফল 1.54 বর্গমিটার এবং উচ্চতা 2.4 মিটার, (ii) ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 17.5 মিটার। *[Madhyamik '00]*

সমাধান (i) শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল = 1.54 বর্গমিটার

উচ্চতা = 2.4 মিটার

∴ শঙ্কুর নির্ণেয় আয়তন = $\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\left(\frac{1}{3}\times1.54\times2.4\right)$ ঘনমিটার = 1.232 ঘনমিটার

(ii) শঙ্কুর ভূমির ব্যাস = 21 মিটার

এবং তির্যক উচ্চতা (l) = 17.5 মিটার

∴ শঙ্কুর ব্যাসার্ধ (r) = $\frac{21}{2}$ মিটার = 10.5 মিটার

আমরা জানি, $h^2 = l^2 - r^2$

বা, $h^2 = (17.5)^2 - (10.5)^2 = (17.5+10.5)(17.5-10.5)$

বা, $h^2 = 28.0 \times 7$

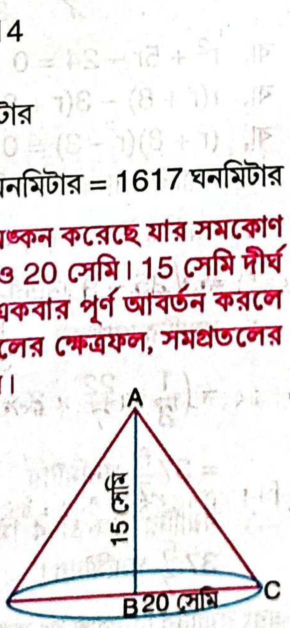
বা, $h = \sqrt{7\times4\times7} = 2\times7 = 14$

∴ উচ্চতা = 14 মিটার

∴ শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2h$ ঘনমিটার

$=\left[\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}}\times\frac{\overset{\cancel{3}}{\cancel{21}}}{\cancel{2}}\times\frac{21}{\cancel{2}}\times\overset{7}{\cancel{14}}\right]$ ঘনমিটার = 1617 ঘনমিটার

3. আমিনা একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করেছে যার সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 15 সেমি ও 20 সেমি। 15 সেমি দীর্ঘ বাহুটিকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে ঘনবস্তু তৈরি হয়, তার পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করি।



সমাধান সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর

AB = 15 সেমি

এবং BC = 20 সেমি

ত্রিভুজের AB বাহুকে অক্ষ ধরে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে একটি সমকোণী লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি হয়, যার উচ্চতা (AB) = 15 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ (BC) = 20 সেমি

∴ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(15)^2 + (20)^2}$ সেমি $= \sqrt{225 + 400}$ সেমি

$= \sqrt{625}$ সেমি = 25 সেমি

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $(\pi \times BC \times AC)$

$=\left(\frac{22}{7}\times20\times25\right)$ বর্গসেমি $= \frac{11000}{7}$ বর্গসেমি

$= 1571\frac{3}{7}$ বর্গসেমি

এবং শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi \times BC \times (AC + BC)$

$=\left[\frac{22}{7}\times20\times(25+20)\right]$ বর্গসেমি

$=\left[\frac{22}{7}\times20\times45\right]$ বর্গসেমি

$= \frac{19800}{7}$ বর্গসেমি $= 2828\frac{4}{7}$ বর্গসেমি

শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi\times(BC)^2\times AB$

$=\left[\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(20)^2\times15\right]$ ঘনসেমি

$=\left[\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times400\times15\right]$ ঘনসেমি

$= \frac{44000}{7}$ ঘনসেমি $= 6285\frac{5}{7}$ ঘনসেমি

4. কোনো শঙ্কুর উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 6 সেমি ও 10 সেমি হলে, শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করি।

সমাধান একটি শঙ্কুর উচ্চতা (h) = 6 সেমি

এবং তির্যক উচ্চতা (l) = 10 সেমি

∴ ব্যাসার্ধ (r) = $\sqrt{l^2 - h^2}$ সেমি $= \sqrt{10^2 - 6^2}$ সেমি

$= \sqrt{100 - 36}$ সেমি $= \sqrt{64}$ সেমি = 8 সেমি

∴ শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r(l + r)$ বর্গসেমি

$=\left[\frac{22}{7}\times8\times(10+8)\right]$ বর্গসেমি $=\left[\frac{22}{7}\times8\times18\right]$ বর্গসেমি

$= 452\frac{4}{7}$ বর্গসেমি

এবং আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2h = \left(\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{22}{7}\times8\times8\times\overset{2}{\cancel{6}}\right)$ ঘনসেমি

$= \frac{2816}{7}$ ঘনসেমি $= 402\frac{2}{7}$ ঘনসেমি

5. কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন 100π ঘনসেমি এবং উচ্চতা 12 সেমি হলে শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি। *[Madhyamik '20]*

সমাধান শঙ্কুর উচ্চতা = 12 সেমি এবং আয়তন = 100π ঘনসেমি

∴ মনে করি, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r সেমি

তাহলে, শঙ্কুর আয়তন = $\left(\frac{1}{3}\pi r^2\times12\right)$ ঘনসেমি

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{3}\pi\times r^2\times12 = 100\pi$

বা, $r^2 = \frac{\overset{25}{\cancel{100}}\times\cancel{\pi}\times\cancel{3}}{\cancel{\pi}\times\underset{4}{\cancel{12}}} = 25$ বা, r = 5

∴ শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ = 5 সেমি

∴ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা = $\sqrt{(12)^2 + (5)^2}$ সেমি

$= \sqrt{144 + 25}$ সেমি $= \sqrt{169}$ সেমি = 13 সেমি

6 **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবু তৈরি করতে 77 বর্গমিটার ত্রিপল লেগেছে। তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা যদি 7 মিটার হয়, তবে তাঁবুটির ভূমিতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।** *[Madhyamik '19]*

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাঁবুর তির্যক উচ্চতা (l) = 7 মিটার

মনে করি, তাঁবুটির ভূমির ব্যাসার্ধ r মিটার

তাহলে তাঁবুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = ($\pi r \times 7$) বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\pi \times r \times 7 = 77$

বা, $r = \frac{77}{7 \times \pi} = \frac{77 \times 7}{7 \times 22} = \frac{7}{2}$

∴ তাঁবুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 7 মিটার হলে ভূমিতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi r^2$ বর্গমিটার $= \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$ বর্গমিটার

$= \frac{77}{2}$ বর্গমিটার = 38.5 বর্গমিটার

7 **একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস 21 মিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার। প্রতি বর্গমিটার 1.50 টাকা হিসাবে পার্শ্বতল রং করতে কত টাকা খরচ পড়বে হিসাব করি।** *[Madhyamik '20]*

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাস = 21 মিটার

তাহলে, ব্যাসার্ধ (r) = $\frac{21}{2}$ মিটার

এবং উচ্চতা (h) = 14 মিটার

∴ শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ মিটার

$= \sqrt{(14)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2}$ মিটার $= \sqrt{196 + \frac{441}{4}}$ মিটার

$= \sqrt{\frac{1225}{4}}$ মিটার $= \frac{35}{2}$ মিটার

∴ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r l$ বর্গমিটার

$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{35}{2}\right)$ বর্গমিটার $= \frac{1155}{2}$ বর্গমিটার

এখন, 1 বর্গমিটার পার্শ্বতল রং করতে খরচ পড়বে 1.50 টাকা

∴ $\frac{1155}{2}$ বর্গমিটার পার্শ্বতল রং করতে খরচ পড়বে

$\left(1.50 \times \frac{1155}{2}\right)$ টাকা $= \frac{1732.5}{2}$ টাকা = 866.25 টাকা

8 **নিরেট শঙ্কু আকৃতির একটি কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি। খেলনাটির বক্রতলে প্রতি বর্গসেমি 2.10 টাকা হিসাবে পালিশ করতে 429 টাকা খরচ পড়ে। খেলনাটির উচ্চতা কত হিসাব করি। খেলনাটি তৈরি করতে কত ঘনসেমি কাঠ লেগেছে নির্ণয় করি।**

সমাধান শঙ্কু আকৃতির কাঠের খেলনার ভূমিতলের ব্যাস = 10 সেমি

∴ ভূমিতলের ব্যাসার্ধ (r) = $\frac{10}{2}$ সেমি = 5 সেমি

মনে করি, খেলনাটির উচ্চতা = h সেমি

∴ খেলনাটির তির্যক উচ্চতা (l) = $\sqrt{h^2 + 5^2}$ সেমি

∴ খেলনাটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r l$ বর্গসেমি

$= (\pi \times 5 \times \sqrt{h^2 + 25})$ বর্গসেমি

আবার, খেলনাটির বক্রতলের 1 বর্গসেমি পালিশ করতে খরচ পড়বে 2.10 টাকা

∴ খেলনাটির সমস্ত বক্রতল পালিশ করতে মোট খরচ

$= [(5\pi \sqrt{h^2 + 25}) \times 2.10]$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $5\pi \sqrt{h^2 + 25} \times 2.10 = 429$

বা, $\sqrt{h^2 + 25} = \frac{429}{2.10} \times \frac{1}{5\pi} = \frac{429}{210} \times \frac{7 \times 100}{22 \times 5} = 13$

বা, $h^2 + 25 = (13)^2 = 169$ বা, $h^2 = 169 - 25 = 144$

বা, h = 12

∴ খেলনাটির উচ্চতা = 12 সেমি

এবং খেলনাটির আয়তন = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ঘনসেমি

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 12\right)$ ঘনসেমি

$= \frac{2200}{7}$ ঘনসেমি $= 314\frac{2}{7}$ ঘনসেমি

∴ খেলনাটি তৈরি করতে $314\frac{2}{7}$ ঘনসেমি কাঠ লাগবে।

9 **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি লোহার পাতের বয়া তৈরি করতে $75\frac{3}{7}$ বর্গমিটার লোহার পাত লেগেছে। বয়াটির তির্যক উচ্চতা যদি 5 মিটার হয়, তবে বয়াটিতে কত বায়ু আছে এবং বয়াটির উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি। ওই বয়াটির চারপাশ রং করতে প্রতি বর্গমিটার 2.80 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়বে নির্ণয় করি। (লোহার পাতের বেধ হিসাবের মধ্যে ধরতে হবে না।)**

সমাধান লোহার শঙ্কু আকৃতির বয়ার তির্যক উচ্চতা (l) = 5 মিটার

মনে করি, বয়াটির ব্যাসার্ধ = r মিটার

∴ বয়াটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r (l + r)$ বর্গমিটার

$= \left[\frac{22}{7} \times r \times (5 + r)\right]$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\frac{22}{7} \times r \times (5 + r) = \frac{528}{7}$

বা, $5r + r^2 = \frac{528}{7} \times \frac{7}{22} = 24$

বা, $r^2 + 5r - 24 = 0$ বা, $r^2 + 8r - 3r - 24 = 0$

বা, $r(r + 8) - 3(r + 8) = 0$

বা, $(r + 8)(r - 3) = 0$ বা, r = – 8, 3

∴ বয়াটির ব্যাসার্ধ = 3 মিটার [∵ ব্যাসার্ধ ঋণাত্মক হতে পারে না]

∴ বয়াটির উচ্চতা (h) = $\sqrt{l^2 - r^2}$ মিটার $= \sqrt{5^2 - 3^2}$ মিটার

$= \sqrt{25 - 9}$ মিটার $= \sqrt{16}$ মিটার = 4 মিটার

∴ বয়াটির আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনমিটার

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 4\right)$ ঘনমিটার $= \frac{264}{7}$ ঘনমিটার

$= 37\frac{5}{7}$ ঘনমিটার

∴ বয়াটির উচ্চতা 4 মিটার এবং বয়াটির মধ্যে বায়ুর পরিমাণ $37\frac{5}{7}$ ঘনমিটার।

এবং বয়াটির চারপাশ রং করতে মোট খরচ = $\left(75\frac{3}{7} \times 2.80\right)$ টাকা

$= \left(\frac{528}{7} \times 2.80\right)$ টাকা = 211.20 টাকা

10 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবুতে 11 জন লোক থাকতে পারে। প্রত্যেক লোকের জন্য ভূমিতে 4 বর্গমিটার জায়গা লাগে এবং 20 ঘনমিটার বাতাসের প্রয়োজন। ঠিক এই 11 জন লোকের জন্য নির্মিত তাঁবুর উচ্চতা নির্ণয় করি। *[Madhyamik '22]*

সমাধান তাঁবুতে মোট 11 জন লোক থাকতে পারে এবং প্রত্যেক লোকের ভূমিতে 4 বর্গমিটার জায়গা লাগে।

∴ ভূমির মোট ক্ষেত্রফল = (11 × 4) বর্গমিটার = 44 বর্গমিটার

এবং তাঁবুটির আয়তন = 20 ঘনমিটার

মনে করি, তাঁবুটির উচ্চতা h মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r মিটার

প্রশ্নানুসারে,

$\pi r^2 = 44$ ...(i) এবং $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 20 \times 11$ ...(ii)

বা, $r^2 = \frac{44}{22} \times 7$ বা, $r^2 = 14$

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $\frac{1}{3} \times \pi \times 14 \times h = 20 \times 11$

বা, $h = \frac{11 \times 20 \times 3}{14 \times \pi} = \frac{20 \times 3 \times 7 \times 11}{14 \times 22} = 15$

∴ তাঁবুর উচ্চতা 15 মিটার।

11 শোলা দিয়ে তৈরি একটি শঙ্কু আকৃতির মাথার টোপরের ভূমির বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি। টোপরটির উপরিভাগ রাংতা দিয়ে মুড়তে প্রতি বর্গসেমি 10 পয়সা হিসাবে 57.75 টাকা খরচ পড়ে। টোপরটির উচ্চতা ও তির্যক উচ্চতা হিসাব করে লিখি।

সমাধান মনে করি, টোপরটির তির্যক উচ্চতা = l সেমি

টোপরের ভূমির ব্যাস = 21 সেমি

∴ ভূমির ব্যাসার্ধ (r) = $\frac{21}{2}$ সেমি

∴ টোপরটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi r l$ বর্গসেমি

$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times l\right)$ বর্গসেমি

∴ টোপরের বক্রতলে রাংতা লাগাতে মোট খরচ

$= \left(\frac{10}{100} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times l\right)$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $\frac{10}{100} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times l = 57.75$

বা, $l = \frac{57.75 \times 100}{10} \times \frac{7}{22} \times \frac{2}{21}$

বা, $l = \frac{5775}{100} \times \frac{100}{10} \times \frac{7}{22} \times \frac{2}{21} = \frac{35}{2} = 17.5$

∴ টোপরটির তির্যক উচ্চতা = 17.5 সেমি

এবং উচ্চতা = $\sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2}$ সেমি

$= \sqrt{\left(\frac{35}{2} + \frac{21}{2}\right)\left(\frac{35}{2} - \frac{21}{2}\right)}$ সেমি

$= \sqrt{28 \times 7}$ সেমি $= \sqrt{2^2 \times 7^2}$ সেমি = 14 সেমি

12 গমের একটি স্তূপ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারে আছে, যার ভূমির ব্যাসের দৈর্ঘ্য 9 মিটার এবং উচ্চতা 3.5 মিটার। মোট গমের আয়তন নির্ণয় করি। গমের ওই স্তূপ ঢাকতে কমপক্ষে কত বর্গমিটার প্লাস্টিকের চাদর প্রয়োজন হবে হিসাব করে দেখি। [ধরি, $\pi = 3.14$, $\sqrt{130} = 11.4$]

সমাধান শঙ্কুর ভূমির ব্যাস = 9 মিটার এবং উচ্চতা (h) = 3.5 মিটার

তাহলে শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ (r) = $\frac{9}{2}$ মিটার

∴ গমের আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনমিটার

$= \left(\frac{1}{3} \times 3.14 \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} \times 3.5\right)$ ঘনমিটার = 74.18 ঘনমিটার

আবার, তির্যক উচ্চতা (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ মিটার

$= \sqrt{(3.5)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}$ মিটার $= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}$ মিটার

$= \sqrt{\frac{49 + 81}{4}}$ মিটার $= \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{130}\right)$ মিটার $= \frac{11.4}{2}$ মিটার

= 5.7 মিটার

∴ মোট প্রয়োজনীয় প্লাস্টিকের পরিমাণ = $\pi r l$ বর্গমিটার

= (3.14 × 4.5 × 5.7) বর্গমিটার = 80.541 বর্গমিটার

13. অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (VSA)

A বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (MCQ)

i একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 15 সেমি এবং ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 16 সেমি হলে, শঙ্কুটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল—

(a) 60π বর্গসেমি (b) 68π বর্গসেমি (c) 120π বর্গসেমি (d) 130π বর্গসেমি। **c**

ii দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 1 : 4 এবং তাদের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 4 : 5 হলে, তাদের উচ্চতার অনুপাত— *[Madhyamik '20]*

(a) 1 : 5 (b) 5 : 4 (c) 25 : 16 (d) 25 : 64 **d**

iii একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একই রেখে উচ্চতা দ্বিগুণ করলে, শঙ্কুটির আয়তন বৃদ্ধি পায়—

(a) 100% (b) 200% (c) 300% (d) 400% **a**

iv একটি শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুটির আয়তন হয় পূর্বের শঙ্কুর আয়তনের— *[Madhyamik '17]*

(a) 3 গুণ (b) 4 গুণ (c) 6 গুণ (d) 8 গুণ। **d**

v একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{r}{2}$ একক এবং তির্যক উচ্চতা $2l$ একক হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল—

(a) $2\pi r(l + r)$ বর্গএকক (b) $\pi r\left(l + \frac{r}{4}\right)$ বর্গএকক (c) $\pi r(l + r)$ বর্গএকক (d) $2\pi r l$ বর্গএকক। **b**

সমাধান **i** শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 15 সেমি এবং

ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{16}{2}$ সেমি $= 8$ সেমি

$\therefore$ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi \times 8 \times 15)$ বর্গসেমি

$= 120\pi$ বর্গসেমি

ii মনে করি, দুটির শঙ্কুর ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 একক, r_2 একক এবং উচ্চতা যথাক্রমে h_1 একক, h_2 একক।

$\therefore$ শঙ্কু দুটির আয়তন যথাক্রমে $\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$ ঘনএকক, $\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$ ঘনএকক।

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = \frac{1}{4}$ এবং $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5}$

বা, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4}$

বা, $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4}$ বা, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{25}{64}$

$\therefore$ উচ্চতার অনুপাত $= 25 : 64$

iii মনে করি, শঙ্কুর ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

আবার, শঙ্কুর উচ্চতা দ্বিগুণ করলে

শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 \times (2h)$ ঘনএকক

$\therefore$ বর্ধিত আয়তন $= \left[\frac{1}{3}\pi r^2 \times (2h) - \frac{1}{3}\pi r^2 \times h\right]$ ঘনএকক

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

$\therefore$ আয়তনের শতকরা বৃদ্ধি $= \dfrac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} \times 100\% = 100\%$

iv মনে করি, শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

এখন শঙ্কুর ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা প্রত্যেকটি দ্বিগুণ করলে শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi \times (2r)^2 \times (2h)$ ঘনএকক

$= \left(8 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$ ঘনএকক $= 8 \times$ পূর্বের আয়তন

v শঙ্কুর ব্যাসার্ধ $= \frac{r}{2}$ একক এবং তির্যক উচ্চতা $= 2l$ একক

$\therefore$ সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi \times \frac{r}{2}\left(2l + \frac{r}{2}\right)$ বর্গএকক

$= \pi r\left(l + \frac{r}{4}\right)$ বর্গএকক

B নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি

i একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ করা হলে শঙ্কুটির আয়তন একই থাকে। *[Madhyamik '20]* **মিথ্যা**

ii একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং তির্যক উচ্চতা সর্বদা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়। *[Madhyamik '22]* **সত্য**

সমাধান **i** মনে করি, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক।

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

আবার, ভূমির ব্যাসার্ধ অর্ধেক এবং উচ্চতা দ্বিগুণ হলে আয়তন

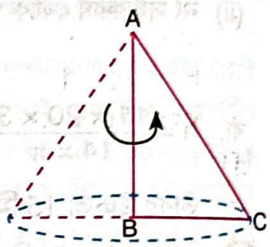
$= \left[\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 \times (2h)\right]$ ঘনএকক $= \frac{1}{6}\pi r^2 h$ ঘনএকক

C শূন্যস্থান পূরণ করি :

i ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC অতিভুজ। AB বাহুকে অক্ষ করে ত্রিভুজটির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ব্যাসার্ধ ______।

ii একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘনএকক এবং ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গএকক হলে, উচ্চতা ______। *[WBBSE Sample Question '17]*

iii একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের উচ্চতা সমান। তাদের আয়তনের অনুপাত ______। *[Madhyamik '23]*



সমাধান **i** ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে অক্ষ করে ত্রিভুজটিকে একবার পূর্ণ আবর্তন করলে যে শঙ্কু উৎপন্ন হয় তার ব্যাসার্ধ BC।

ii মনে করি, শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = V$ ...(i) এবং $\pi r^2 = A$ ... (ii)

বা, $\frac{1}{3} \times A \times h = V$ [(ii) থেকে পাই]

বা, $h = \frac{3V}{A}$

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা $\frac{3V}{A}$ একক।

iii মনে করি, চোঙ এবং শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক।

$\therefore$ তাদের আয়তন যথাক্রমে $\pi r^2 h$ ঘনএকক এবং $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

$\therefore$ আয়তনের অনুপাত $= \dfrac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{1} = 3 : 1$

14. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (SA)

1 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি এবং আয়তন 100π ঘনসেমি। শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

সমাধান লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি

মনে করি, শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ r সেমি

$\therefore$ শঙ্কুটির আয়তন $= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 \times 12\right)$ ঘনসেমি

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{3}\pi r^2 \times 12 = 100\pi$

বা, $r^2 = \frac{100\pi \times 3}{12\pi} = 25$ বা, $r = 5$

$\therefore$ শঙ্কুটির ব্যাসার্ধ 5 সেমি।

ii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ভূমিতলের ক্ষেত্রফলের $\sqrt{5}$ গুণ। শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি। *[Madhyamik '19]*

সমাধান মনে করি, শঙ্কুর উচ্চতা h একক এবং ব্যাসার্ধ r একক

$\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক

$\therefore$ শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গএকক

$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গএকক

এবং ভূমিতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গএকক

প্রশ্নানুসারে, $\pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{5}(\pi r^2)$

বা, $\sqrt{h^2 + r^2} = \frac{\sqrt{5} \times \pi r^2}{\pi r}$

বা, $h^2 + r^2 = 5r^2$

বা, $h^2 = 5r^2 - r^2 = 4r^2$

বা, $\frac{h^2}{r^2} = \frac{4}{1}$ বা, $\frac{h}{r} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ $h : r = 2 : 1$

$\therefore$ শঙ্কুর উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের অনুপাত 2 : 1।

iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক, ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গএকক এবং উচ্চতা H একক হলে, $\frac{AH}{V}$-এর মান কত তা লিখি।

সমাধান মনে করি, লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধ r একক

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 H$ ঘনএকক এবং

ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গএকক

প্রশ্নানুসারে, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ ... (i) এবং $A = \pi r^2$ ...(ii)

বা, $V = \frac{1}{3}AH$ [(ii) থেকে পাই]

$\therefore$ $\frac{AH}{V} = 3$

iv) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন এবং পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান। শঙ্কুটির উচ্চতা এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে h একক এবং r একক হলে, $\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r^2}$-এর মান কত তা লিখি।

সমাধান শঙ্কুর উচ্চতা h একক এবং ব্যাসার্ধ r একক হলে

শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘনএকক

এবং পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গএকক

$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গএকক [$\because l^2 = h^2 + r^2$]

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

বা, $rh = 3\sqrt{h^2 + r^2}$

বা, $r^2h^2 = 9(h^2 + r^2)$ বা, $\frac{h^2 + r^2}{r^2h^2} = \frac{1}{9}$

$\therefore$ $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{9}$

v) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের উচ্চতার অনুপাত 2 : 3; চোঙ এবং শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

সমাধান মনে করি, লম্ব বৃত্তাকার চোঙ এবং লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 একক এবং r_2 একক এবং তাদের উচ্চতা যথাক্রমে h_1 একক এবং h_2 একক।

$\therefore$ তাদের আয়তন যথাক্রমে $\pi r_1^2 h_1$ ঘনএকক

এবং $\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$ ঘনএকক।

প্রশ্নানুসারে, $r_1 : r_2 = 3 : 4$ এবং $h_1 : h_2 = 2 : 3$

$\therefore$ $\frac{\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2} = 3 \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{2}{3}$

$= 3 \times \frac{9}{4 \times 4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় আয়তনের অনুপাত 9 : 8।

অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি (মান-2)

1 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল তার ভূমির ক্ষেত্রফলের $\sqrt{10}$ গুণ। শঙ্কুর উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসের অনুপাত কত? *[Madhyamik '05]*

অথবা, একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল তার ভূমির ক্ষেত্রফলের $\sqrt{10}$ গুণ। দেখাও যে, শঙ্কুটির উচ্চতা এর ভূমির ব্যাসার্ধের তিন গুণ। *[Madhyamik '13]*

2 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $\sqrt{58}$ সেমি ও ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সেমি হলে, তার উচ্চতা কত?

3 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সেমি ও বক্রতলের ক্ষেত্রফল 550 বর্গসেমি। এর লম্ব উচ্চতা কত?

4 একটি লম্ব বৃত্তাকাবর শঙ্কুর আয়তন V ঘন একক, ভূমিতলের ক্ষেত্রফল A বর্গএকক এবং উচ্চতা H একক হলে $\frac{AH}{3V}$-এর মান নির্ণয় করো। *[Madhyamik '23]*

5 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধ ও তির্যক উচ্চতার অনুপাত 4 : 5 এবং আয়তন 16π ঘনসেমি হলে, শঙ্কুর উচ্চতা নির্ণয় করো। *[Sargachi R K Mission High School '17]*

6 একটি শঙ্কু আকৃতির তাঁবুর ভূমির ব্যাস 16 মিটার এবং উচ্চতা 15 মিটার। ওই তাঁবুর জন্য কত বর্গমিটার ক্যানভ্যাস লাগবে? *[Tripura Madhyamik '93]*

7 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ দ্বিগুণ করা হল। আয়তন স্থির রাখতে হলে উচ্চতার কী পরিবর্তন করতে হবে? *[SSC (10+2) '12]*

8 একটি শঙ্কু আকৃতির পর্বতের তির্যক উচ্চতা 2.5 কিমি এবং উহার ভূমির ক্ষেত্রফল 1.54 বর্গকিমি হলে পর্বতটির উচ্চতা কত? *[Madhyamik '03, '01] [Tripura Madhyamik '94]*

9 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির তাঁবু তৈরি করতে $188\frac{4}{7}$ বর্গমিটার কাপড় লাগে। তাঁবুটির ভূমিতলের পরিধি $37\frac{5}{7}$ মিটার হলে, তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা কত? *[Madhyamik '88]*

10 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির একটি জলের ট্যাঙ্কের ভিতরের দিকের ভূমিতলের ব্যাস 28 মিটার এবং উচ্চতা 18 মিটার। ট্যাংকটিতে কত লিটার জল ধরে? (1 লিটার = 1 ঘনডেসিমি) [Madhyamik '99] [JEXPO '05]

11 9 সেমি উচ্চতা এবং 4 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লোহার বেলনকে গলিয়ে 6 সেমি ব্যাসের শঙ্কু তৈরি করা হল। শঙ্কুটির উচ্চতা এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। [JEXPO '04]

দীর্ঘ প্রশ্নোত্তর (মান-4)

12 একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 7 সেমি এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 147.84 বর্গসেমি। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। [WBBSE Sample Question '17]

13 একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও শঙ্কুর ভূমি দুটি সমান এবং তাদের আয়তনের অনুপাত 3 : 2। প্রমাণ করো যে, শঙ্কুটির উচ্চতা চোঙটির উচ্চতার দ্বিগুণ। [Hooghly Collegiate School '17]

14 একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা উহার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। যদি উচ্চতা ভূমির ব্যাসের 7 গুণ হতো, তবে শঙ্কুটির আয়তন 539 ঘন সেমি বেশি হতো। শঙ্কুটির উচ্চতা নির্ণয় করো। [Madhyamik '23]

15 একটি নিরেট অর্ধগোলকের সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 1848 বর্গসেমি। অর্ধগোলকটিকে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হল। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধ অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধের সমান হলে, শঙ্কুর উচ্চতা কত?

16 একটি শঙ্কু আকৃতির তাঁবুর লম্ব উচ্চতা 21 মিটার ও ভূমির ব্যাসার্ধ 28 মিটার। তাঁবুটি তৈরি করতে 8.8 মিটার চওড়া কত মিটার দৈর্ঘ্যের কাপড় লাগবে? যদি প্রতি বর্গমিটার কাপড়ের দাম 25 টাকা হয়, তবে তাঁবুটি প্রস্তুত করতে কত মূল্যের কাপড় লাগবে?

17 কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল S, উচ্চতা h এবং অর্ধশীর্ষকোণ α। প্রমাণ করো যে, $S = \pi h^2 \sin\alpha \sec^2\alpha$।

18 একটি তাঁবুর নীচের অংশ চোঙাকৃতি এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। উভয়ের ভূমি একই। চোঙের ভূমিতলের ব্যাস 4.2 মিটার, উচ্চতা 4 মিটার, শঙ্কুর উচ্চতা 2.8 মিটার। তাঁবুর আয়তন কত? [Bagbazar Multipurpose Girls High School '17]

19 4 সেমি ব্যাসার্ধের অর্ধগোলাকার বাটির কানা পর্যন্ত কফিতে পূর্ণ করা হল। এরপর ওই কফি 8 সেমি ব্যাসার্ধের ও 16 সেমি উচ্চতার একটি উল্লম্ব শঙ্কুর মধ্যে রাখা হল। শঙ্কুটির কত শতাংশ খালি আছে? [Jodhpur Park Boys' School '17]

20 একটি শঙ্কুর উচ্চতা 20 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি। শঙ্কুটির সমান আয়তনের একটি নিরেট চোঙের উচ্চতা 15 সেমি হলে, চোঙের ভূমির ব্যাস কত? [Burdwan Municipal High School '17]

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি (মান-1)

21 সঠিক উত্তর নির্বাচন করো

i) দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত 1 : 3 এবং ব্যাসার্ধের অনুপাত 3 : 1 হলে, শঙ্কু দুটির আয়তনের অনুপাত— [Howrah Vivekananda Institution '17]
(a) 3 : 2 (b) 3 : 1 (c) 3 : 4 (d) 2 : 3

ii) দুটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন সমান। যদি তাদের বৃত্তাকার সমতলের ব্যাসার্ধ 1 : 2 অনুপাতে থাকে, তবে তাদের উচ্চতার অনুপাত— [JEXPO '13]
(a) 2 : 1 (b) 3 : 1 (c) 4 : 1 (d) 8 : 1

iii) একটি শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল ভূমিতলের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুটির উচ্চতা ও ব্যাসের অনুপাত—
(a) 2 : 1 (b) $\sqrt{2}$: 1 (c) $\sqrt{3}$: 1 (d) $\sqrt{3}$: 2

iv) দুটি শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত 2 : 3, তাদের ভূমির ব্যাসার্ধের অনুপাত 1 : 2, শঙ্কু দুটির উচ্চতার অনুপাত—
(a) 3 : 8 (b) 8 : 3 (c) 3 : 4 (d) 4 : 3

v) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা, লম্ব উচ্চতা ও ভূমির ব্যাস যথাক্রমে $\frac{l}{2}$, $\frac{h}{2}$ এবং d। শঙ্কুটির আয়তন—
(a) $\frac{\pi d l}{4}$ (b) $\frac{\pi d^2 h}{24}$
(c) $\frac{\pi}{3}(d^2 + h^2)$ (d) কোনোটিই নয়।

vi) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 12 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 13 সেমি হলে, শঙ্কুটির আয়তন— [Uttarpara Govt High School '16]
(a) 64π ঘনসেমি (b) 49π ঘনসেমি
(c) 100π ঘনসেমি (d) 81π ঘনসেমি।

vii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 21 সেমি ও ভূমির ব্যাসার্ধ 12 সেমি হলে, শঙ্কুটির ঘনফল হবে— [JEXPO '10]
(a) 4710 ঘনসেমি (b) 9504 ঘনসেমি
(c) 3168 ঘনসেমি (d) কোনোটিই নয়।

viii) একটি শঙ্কু আকৃতির পাত্রের ব্যাসার্ধ r সেমি এবং উচ্চতা h সেমি। পাত্রটি জলপূর্ণ আছে। এই পাত্রটির জল R সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি পাত্রে ঢালা হল। এতে চোঙাকৃতি পাত্রের জলের উচ্চতা বৃদ্ধি হবে—
(a) $\frac{rh}{R}$ সেমি (b) $\frac{rh}{2R}$ সেমি
(c) $\frac{r^2h^2}{R^2}$ সেমি (d) $\frac{r^2h}{3R^2}$ সেমি।

ix) লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ 1.5 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 14 মিটার হলে, পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হবে—
(a) 66 বর্গমিটার (b) 22 বর্গমিটার
(c) 44 বর্গমিটার (d) 88 বর্গমিটার।

x) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা দ্বিগুণ করলে, শঙ্কুটির আয়তন বৃদ্ধি পায়— [Asansol RK Mission High School '17]
(a) 300% (b) 400% (c) 700% (d) 800%

xi) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষকোণ 60° এবং ব্যাসার্ধ 14 সেমি হলে, শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল হবে—

(a) 1680 বর্গসেমি (b) 1232 বর্গসেমি

(c) 1080 বর্গসেমি (d) 1442 বর্গসেমি।

xii) শঙ্কু আকৃতির একটি জলাধারের ভূমির ব্যাস 21 মিটার এবং তির্যক উচ্চতা 17.5 মিটার। জলাধারটির ধারণ ক্ষমতা— *[JEXPO '16]*

(a) 14260 ঘনডেসিমি (b) 1520720 ঘনডেসিমি

(c) 1617000 ঘনডেসিমি (d) 1315760 ঘনডেসিমি।

22 শূন্যস্থান পূরণ করো

i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ______ টি শীর্ষবিন্দু আছে।

ii) একটি শঙ্কুর আয়তনের সাংখ্যমান শঙ্কুটির ভূমির ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমানের সমান হলে, শঙ্কুটির উচ্চতা ______ একক।

iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর মোট তল সংখ্যা ______ টি। *[Sunity Academy, Cooch Behar '17]*

iv) একই ভূমির ব্যাস ও একই আয়তনবিশিষ্ট একটি চোঙ ও একটি শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত হবে ______।

23 সত্য / মিথ্যা যাচাই করো

i) একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল A, পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল S এবং তির্যক উচ্চতা L হলে, $\pi = \frac{S^2}{AL^2}$।

ii) একটি শঙ্কু আকৃতির পাত্রের ব্যাসার্ধ তার উচ্চতার $\frac{1}{3}$ গুণ হয়। যদি যান্ত্রিক ত্রুটির কারণে 1 সেমিকে 1.01 সেমি ধরা হয় তবে শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে শতকরা ত্রুটি হবে 2.12।

iii) কোনো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা ভূমির ব্যাসার্ধের 3 গুণ হলে আয়তন πr^3 ঘনএকক হবে। *[Burdwan Town School '17]*

উত্তরমালা

1. 3 : 2; **2.** 7 সেমি; **3.** 24 সেমি; **4.** 1; **5.** 3 সেমি; **6.** $427\frac{3}{7}$ বর্গমিটার; **7.** আগের উচ্চতার $\frac{1}{4}$ গুণ; **8.** 2.4 কিমি; **9.** তির্যক উচ্চতা = 10 মিটার, ব্যাসার্ধ = 6 মিটার, উচ্চতা = 8 মিটার; **10.** 3696000 লিটার; **11.** উচ্চতা = 12 সেমি, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{66}{7}(\sqrt{153} + 3)$ বর্গসেমি; **12.** 4.2 সেমি; **14.** 7 সেমি; **15.** 28 সেমি; **16.** 350 মিটার, 77000 টাকা; **18.** 68.376 ঘনমিটার; **19.** 87.5%; **20.** 20 সেমি; **21.** (i) (b), (ii) (c), (iii) (d), (iv) (b), (v) (b), (vi) (c), (vii) (c), (viii) (d), (ix) (a), (x) (c), (xi) (b), (xii) (c); **22.** (i) 1 টি, (ii) 3, (iii) 2, (iv) 1 : 3; **23.** (i) সত্য, (ii) মিথ্যা, (iii) সত্য।

KNOWLEDGE Clip

ভুলটা কোথায়?

প্রমাণ করো 2 = 1

ধরা যাক, a = b ...(1)

∴ $a^2 = ab$ [উভয়পক্ষকে a দিয়ে গুণ করে] ...(2)

বা, $a^2 - b^2 = ab - b^2$ [উভয়পক্ষে b^2 বিয়োগ করে] ...(3)

বা, $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ ...(4)

বা, $(a + b) = b$ [উভয়পক্ষকে (a – b) দিয়ে ভাগ করে] ...(5)

বা, 2b = b [(1)-এর সাহায্যে]

বা, 2 = 1; কিন্তু এটা অসম্ভব

কারণ— (4) থেকে (5)-এ আসার সময় আমরা (a – b) দিয়ে ভাগ করেছি। কিন্তু যেহেতু a = b ধরেছি, তাই a – b = 0 অর্থাৎ, আমরা (4) থেকে (5)-এ আসার সময় শূন্য (0) দিয়ে ভাগ করেছি। এইরকম ভাগ করাটা অসংজ্ঞাত। ফলে আমরা অসম্ভব ফলে উপনীত হয়েছি।